



# Contribution à l'étude du brassage pneumatique de métaux liquides en poche de traitement et des transferts métal-laitier

Marc Burty

## ► To cite this version:

Marc Burty. Contribution à l'étude du brassage pneumatique de métaux liquides en poche de traitement et des transferts métal-laitier. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 1989. Français. NNT : . tel-01336453

**HAL Id: tel-01336453**

**<https://hal.science/tel-01336453>**

Submitted on 23 Jun 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

présentée par

**BURTY Marc**

Pour obtenir le titre de DOCTEUR

**de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE  
GRENOBLE**

(arrêté ministériel du 5 juillet 1984)

Spécialité : Mécanique

---

**Contribution à l'étude du brassage pneumatique de  
métaux liquides en poche de traitement et des transferts  
métal-laitier**

---

Date de soutenance : 23 octobre 1989

Composition du jury :

|        |           |             |
|--------|-----------|-------------|
| M. G.  | LESPINARD | Président   |
| M. J.  | SZEKELY   | Rapporteurs |
| M. PL. | VIOLLET   |             |
| M. D.  | HUIN      | Examineurs  |
| M. Y.  | FAUTRELLE |             |



# Sommaire

Page

|   |    |
|---|----|
| RESUME - ABSTRACT - MOTS CLES .....                       |    |
| NOMENCLATURE .....  | 1  |
| INTRODUCTION .....  | 3  |
| 1 - ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE .....                           | 9  |
| 1.1) <u>Résultats expérimentaux</u>                       |    |
| 1.1.1) Transition "jetting-bubbling"                      |    |
| 1.1.2) Régimes d'écoulement dans le bain                  |    |
| 1.1.3) Bulles en écoulements turbulents                   |    |
| 1.1.3.1) géométrie de bulles                              |    |
| 1.1.3.2) fractionnement                                   |    |
| 1.1.3.3) coalescence                                      |    |
| 1.1.4) Transfert de quantité de mouvement dans le laitier |    |
| 1.1.5) Transfert de masse                                 |    |
| 1.2) <u>Modélisation</u>                                  |    |
| 1.2.1) Modèles à une phase                                |    |
| 1.2.2) Modèles à deux phases                              |    |
| 2 - LE MODELE A DEUX PHASES POUR LE METAL LIQUIDE .....   | 23 |
| 2.1) <u>Equations locales instantanées</u>                |    |
| 2.2) <u>Moyenne statistique de phase</u>                  |    |
| 2.2.1) Opérateur de moyenne                               |    |
| 2.2.2) Fonction de phase et valeurs moyennes              |    |
| 2.3) <u>Equations moyennes instantanées</u>               |    |
| 2.3.1) Hypothèses et méthode                              |    |
| 2.3.2) Equations  |    |
| 2.4) <u>Lois constitutives</u>                            |    |
| 2.4.1) Tenseur des contraintes visqueuses                 |    |
| 2.4.2) La force de couplage                               |    |
| 2.4.3) Vitesse de glissement                              |    |
| 2.4.4) Modèle de turbulence                               |    |
| 2.4.4.1) le tenseur des contraintes turbulentes           |    |
| 2.4.4.2) fermeture en un point                            |    |



|   |    |
|---|----|
| 2.4.4.2.1) énergie cinétique de la turbulence                             |    |
| 2.4.4.2.2) taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence    |    |
| 2.4.4.2.3) le modèle retenu   |    |
| 2.4.5) Transfert de masse métal-gaz                                       |    |
| 2.5) <u>Discussion des ordres de grandeur</u>                             |    |
| 2.6) <u>Système final</u>   |    |
| 3 - TRANSFERTS .....  | 41 |
| 3.1) <u>Introduction</u>  |    |
| 3.2) <u>Le modèle hydrodynamique utilisé pour le laitier</u>              |    |
| 3.2.1) Répartition de vitesse dans le laitier                             |    |
| 3.2.2) Hauteur de la couche de laitier                                    |    |
| 3.2.3) Frottement interfacial côté laitier                                |    |
| 3.3) <u>Le modèle de transfert de masse dans le laitier</u>               |    |
| 3.4) <u>Le modèle de transfert de masse métal-laitier</u>                 |    |
| 4 - MODELE NUMERIQUE : LE CODE GALILAI .....                              | 53 |
| 4.1) <u>Les mouvements dans le mélange métal-gaz</u>                      |    |
| 4.1.1) Les équations de transport en coordonnées cartésiennes             |    |
| 4.1.2) Les équations de transport en coordonnées curvilignes orthogonales |    |
| 4.1.2.1) principe des maillages curvilignes orthogonaux                   |    |
| 4.1.2.2) les équations en coordonnées curvilignes                         |    |
| 4.1.3) Schéma de discrétisation : dilemme précision-stabilité             |    |
| 4.1.3.1) la diffusion numérique   |    |
| 4.1.3.2) méthode des pas fractionnaires                                   |    |
| 4.1.3.3) dilemme précision-stabilité                                      |    |
| 4.1.4) Discrétisation   |    |
| 4.1.4.1) le maillage  |    |
| 4.1.4.2) discrétisation des équations de transport                        |    |
| 4.1.4.3) traitement de la pression  |    |
| 4.1.4.4) cas particulier du taux de présence                              |    |
| 4.1.5) Conditions aux limites   |    |
| 4.1.6) Méthode de résolution  |    |
| 4.1.7) Structure du code de calcul  |    |
| 4.2) <u>Le couplage hydrodynamique métal-laitier</u>                      |    |
| 4.3) <u>Transfert de masse métal-laitier</u>                              |    |
| 4.4) <u>Aspects numériques</u>  |    |
| 4.4.1) Problèmes de mise en oeuvre du code de calcul                      |    |
| 4.4.2) Support informatique   |    |

## 5 - EXPERIMENTATIONS ET VALIDATION ..... 71

### 5.1) Objectif

### 5.2) Dispositif expérimental et méthode de mesure

### 5.3) Visualisations

### 5.4) Mesures

#### 5.4.1) Taux de présence dans le panache

#### 5.4.2) Vitesse de bulles (de front de bulles)

#### 5.4.3) Taille de bulles

#### 5.4.4) Fréquence de bulles

#### 5.4.5) Vitesse moyenne et fluctuante du liquide

#### 5.4.6) Vitesse directionnelle

#### 5.4.7) Echelles caractéristiques

#### 5.4.8) Spectre d'énergie du signal

#### 5.4.9) Epaisseur de la couche d'huile

### 5.5) Résultats et comparaisons

#### 5.5.1) Taux de présence dans le panache

#### 5.5.2) Fréquence de bulles

#### 5.5.3) Vitesse de bulles

#### 5.5.4) Durée et taille de bulles

#### 5.5.5) Vitesse moyenne du liquide

#### 5.5.6) Relation vitesse liquide-débit gaz

#### 5.5.7) Relation vitesse liquide-diamètre de bulle

#### 5.5.8) Turbulence

#### 5.5.9) Spectre d'énergie

#### 5.5.10) Déformation de la surface libre

#### 5.5.11) Intermittence, oscillation et instabilité du jet de gaz

#### 5.5.12) Couche de laitier

### 5.6) Perspectives

## 6 - CAS DES POCHEs INDUSTRIELLES ..... 117

### 6.1) Problème de similitude

### 6.2) Taille de bulles

### 6.3) Poches réelles

### 6.4) Comparaison et conclusions

## CONCLUSION ..... 125

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES ..... 127

ANNEXE 1 : TRANSFERT DE QUANTITE DE MOUVEMENT ..... 135

A1.1) Force de traînée

A1.1.1) Vitesse relative

A1.1.2) Coefficient de traînée pour une particule solide

A1.1.3) Coefficient de traînée pour une bulle sans transfert de masse

A1.1.4) Coefficient de traînée d'un ensemble de bulles

A1.2) Forces supplémentaires

ANNEXE 2 : EQUATIONS DE TRANSPORT EN COORDONNEES  
CURVILIGNES ORTHOGONALES ..... 141

A2.1) Equations

A2.2) Terme source pour la première composante de la vitesse du liquide

A2.3) Terme source pour la première composante de la vitesse du gaz

A2.4) Terme source pour les autres composantes de vitesse

A2.5) Terme source pour l'énergie cinétique de la turbulence

A2.6) Terme source pour le taux de dissipation de l'énergie cinétique  
de la turbulence

ANNEXE 3 : DISCRETISATION DES EQUATIONS DE TRANSPORT ..... 147

A3.1) Principe

A3.2) Terme de diffusion

A3.3) Terme de convection

A3.4) Terme source

A3.4.1) Pression et force de volume

A3.4.2) Terme source spécial

A3.4.3) Autres termes sources

ANNEXE 4 : CONDITIONS AUX LIMITES ..... 153

A4.1) Conditions aux limites pour le liquide

A4.1.1) La frontière est une paroi

A4.1.1.1) Cas de la vitesse

A4.1.1.2) Cas de l'énergie cinétique de la turbulence

A4.1.1.3) Cas du taux de dissipation de l'énergie cinétique  
de la turbulence

- A4.1.2) A un injecteur
- A4.1.3) A la surface libre
  - A4.1.3.1) Cas de la vitesse
  - A4.1.3.2) Cas de la pression
  - A4.1.3.3) Cas de l'énergie cinétique de la turbulence et de son taux de dissipation

A4.2) Conditions aux limites pour le gaz

- A4.2.1) La frontière est une paroi
- A4.2.2) A un injecteur
- A4.2.3) A la surface libre
  - A4.2.3.1) Cas de la vitesse
  - A4.2.3.2) Cas des autres variables

ANNEXE 5 : SYSTEME DE MESURE ..... 161

A5.1) Principe

A5.2) Sondes polarographiques

A5.3) Etalonnage des sondes simples

- A5.3.1) polarogramme
- A5.3.2) étalonnage

A5.4) Remarques

A5.5) Traitement du signal



## Nomenclature

|                      |   |
|----------------------|---|
| a                    | : constante ( $A\ m^{-1/2}\ s^{1/2}$ )  |
| b                    | : constante (A)   |
| $A_i$                | : coefficients du système linéaire ( $kg\ s^{-1}$ )                                 |
| c                    | : concentration   |
| $C_1, C_2$           | : constantes  |
| $C_k, C_\varepsilon$ | : constantes  |
| $C_d$                | : coefficient de traînée  |
| $C_\mu$              | : coefficient dans le modèle de turbulence  |
| $C_i$                | : terme de convection ( $kg\ s^{-1}$ )  |
| d                    | : diamètre de bulle (m)   |
| D                    | : diamètre de la cuve (m)   |
| D                    | : coefficient de diffusion d'une espèce chimique ( $m^2\ s^{-1}$ )                  |
| $D_i$                | : terme de diffusion ( $kg\ s^{-1}$ )   |
| Eo                   | : nombre d'Eotvos   |
| Eu                   | : nombre d'Euler  |
| f                    | : force de volume ( $m\ s^{-2}$ )   |
| F                    | : coefficient de transfert de quantité de mouvement ( $s^{-1}$ )                    |
| Fr                   | : nombre de Froude  |
| g                    | : accélération de la pesanteur ( $m\ s^{-2}$ )                                      |
| G                    | : terme de production d'énergie cinétique de la turbulence ( $kg\ m^{-1}\ s^{-4}$ ) |
| h                    | : facteur d'échelle (m)   |
| H                    | : hauteur moyenne de liquide (m)  |
| $H_i(j)$             | : courbure ( $m^{-1}$ )   |
| i, I, i'             | : courant instantané, moyen, fluctuant (A)  |
| k                    | : énergie cinétique de la turbulence ( $m^2\ s^{-2}$ )                              |
| M                    | : source de quantité de mouvement interfacial ( $kg\ m^{-2}\ s^{-2}$ )              |
| Mo                   | : nombre de Morton  |
| p                    | : pression statique (Pa)  |
| Pe                   | : nombre de Péclet  |
| q                    | : coefficient de partage  |
| Q                    | : débit de gaz injecté ( $m^3\ s^{-1}$ )  |
| r                    | : rayon (m)   |
| Re                   | : nombre de Reynolds  |
| s                    | : abscisse curviligne (m)   |
| Sc                   | : nombre de Schmidt   |
| Sh                   | : nombre de Sherwood  |
| SP                   | : terme spécial ( $kg\ s^{-1}$ )  |
| $S_\Phi$             | : terme source relatif à la variable $\Phi$ (fonction de la variable)               |
| Su                   | : terme source du système linéaire (fonction de la variable)                        |
| T                    | : température (K)   |
| T                    | : tenseur des contraintes visqueuses (Pa)   |
| $X_k$                | : fonction de phase   |
| u                    | : vitesse fluctuante ( $m\ s^{-1}$ )  |
| $u_*$                | : vitesse de frottement ( $m\ s^{-1}$ )   |
| U                    | : vitesse moyenne ( $m\ s^{-1}$ )   |
| $U_{gl}$             | : vitesse de glissement ( $m\ s^{-1}$ )   |
| $v^r$                | : vitesse relative ( $m\ s^{-1}$ )  |
| $v_d$                | : vitesse de dérive ( $m\ s^{-1}$ )   |
| We                   | : nombre de Weber   |
| x, y, z              | : coordonnées du plan physique  |

symboles grecs

|                                |  |
|--------------------------------|--|
| $\xi$                          | : coordonnée du plan mathématique transformé                                       |
| $\mu$                          | : viscosité dynamique (Pl)   |
| $\nu$                          | : viscosité cinématique ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )                             |
| $\rho$                         | : masse volumique ( $\text{kg m}^{-3}$ )   |
| $\gamma$                       | : tension interfaciale ( $\text{kg s}^{-2}$ )                                      |
| $\Phi, \alpha$                 | : taux de présence moyen   |
| $\varepsilon$                  | : taux de dissipation de la turbulence ( $\text{m}^2 \text{s}^{-3}$ )              |
| $\delta$                       | : symbole de Kronecker   |
| $\delta$                       | : épaisseur de couche limite (m)   |
| $\tau$                         | : tenseur des contraintes visqueuses dans le laitier (Pa)                          |
| $\kappa$                       | : courbure de l'interface ( $\text{m}^{-1}$ )                                      |
| $\kappa$                       | : constante de Karman  |
| $\sigma$                       | : tenseur des contraintes turbulentes (Pa)   |
| $\Gamma$                       | : source de masse interfaciale ( $\text{kg m}^{-3} \text{s}^{-1}$ )                |
| $\Gamma_\Phi$                  | : coefficient de diffusion de la variable $\Phi$ ( $\text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ) |
| $\sigma_k, \sigma_\varepsilon$ | : constantes du modèle de turbulence   |
| $\sigma_\alpha$                | : nombre de dérive des bulles  |
| $\sigma_p, \sigma_\Phi$        | : nombre de Schmidt de bulle, de la variable $\Phi$                                |

indices et exposants

|   |                       |
|---|-----------------------|
| b | : bulle               |
| l | : liquide             |
| g | : gaz                 |
| i | : interface           |
| t | : turbulent           |
| 1 | : composante numéro 1 |
| 2 | : composante numéro 2 |
| 3 | : composante numéro 3 |

## Introduction

Tout homme dans le bain (sic) a eu vent (sic) de la naissance de la mécanique des fluides au siècle dernier avec Stokes, Reynolds, Euler... Le développement de cette science a naturellement conduit à des applications industrielles aussi diverses que nombreuses. Nous allons voir comment une de ses branches toute récente et très dynamique :

### *l'étude des écoulements diphasiques,*

ou plus généralement polyphasiques, peut profiter à l'industrie métallurgique encore aujourd'hui. Pour mémoire, je rappellerais simplement que les bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie pour un écoulement comprenant  $n$  fluides ont été écrites il y a à peine un quart de siècle (Delhay /0.1/).

Du point de vue métallurgique, de nombreuses études "in situ" (Riboud /0.2/) ont démontré le rôle primordial joué par le laitier pour la désulfuration de l'acier. L'affinité du calcium pour l'oxygène et le soufre est utilisée pour obtenir des aciers ayant des caractéristiques poussées en désulfuration et désoxydation. Le brassage pneumatique est ainsi un moyen couramment utilisé en sidérurgie pour brasser l'acier liquide et accélérer les réactions d'affinage du métal. L'intérêt de ce type de procédé est multiple. Outre des raisons économiques, l'injection de gaz, généralement inerte, permet d'agiter le bain de manière très efficace (cf /0.2/). Les forces de brassage ainsi créées sont d'ailleurs comparables à celles que nous pouvons obtenir avec un brasseur électromagnétique. De plus, le gaz lui-même peut être réactif et réaliser une fonction de traitement du métal liquide /0.2/.

Avant d'introduire les recherches effectuées, voici quelques mots de présentation des diverses poches d'aciérie (figure 0.1) :

- le haut-fourneau est une poche assez particulière, lieu de transformation du coke en fonte,

- les poches torpilles se rencontrent à plusieurs niveaux dans la chaîne de production de l'acier. Elles permettent de transférer la fonte du haut-fourneau au convertisseur, puis du convertisseur aux poches de traitement,

- le convertisseur est la poche où la fonte est convertie en acier grâce à l'addition de ferrailles et d'oxygène,

- les poches de traitement sont généralement de forme cylindrique, avec des parois latérales parfois légèrement inclinées vers l'extérieur (figure 0.2). Le métal est recouvert d'un laitier d'épaisseur 10 à 30% de celle du métal. Pour fixer les idées, voici l'ordre de grandeur des propriétés physiques des métaux et des laitiers :

|  | métal | laitier |
|--|-------|---------|
| masse volumique ( $10^{-3} \text{ kg m}^{-3}$ )                | 6 à 8 | 2 à 3   |
| viscosité cinématique ( $10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ) | 1     | $10^2$  |



Figure 0.1 : Production de l'acier.

4

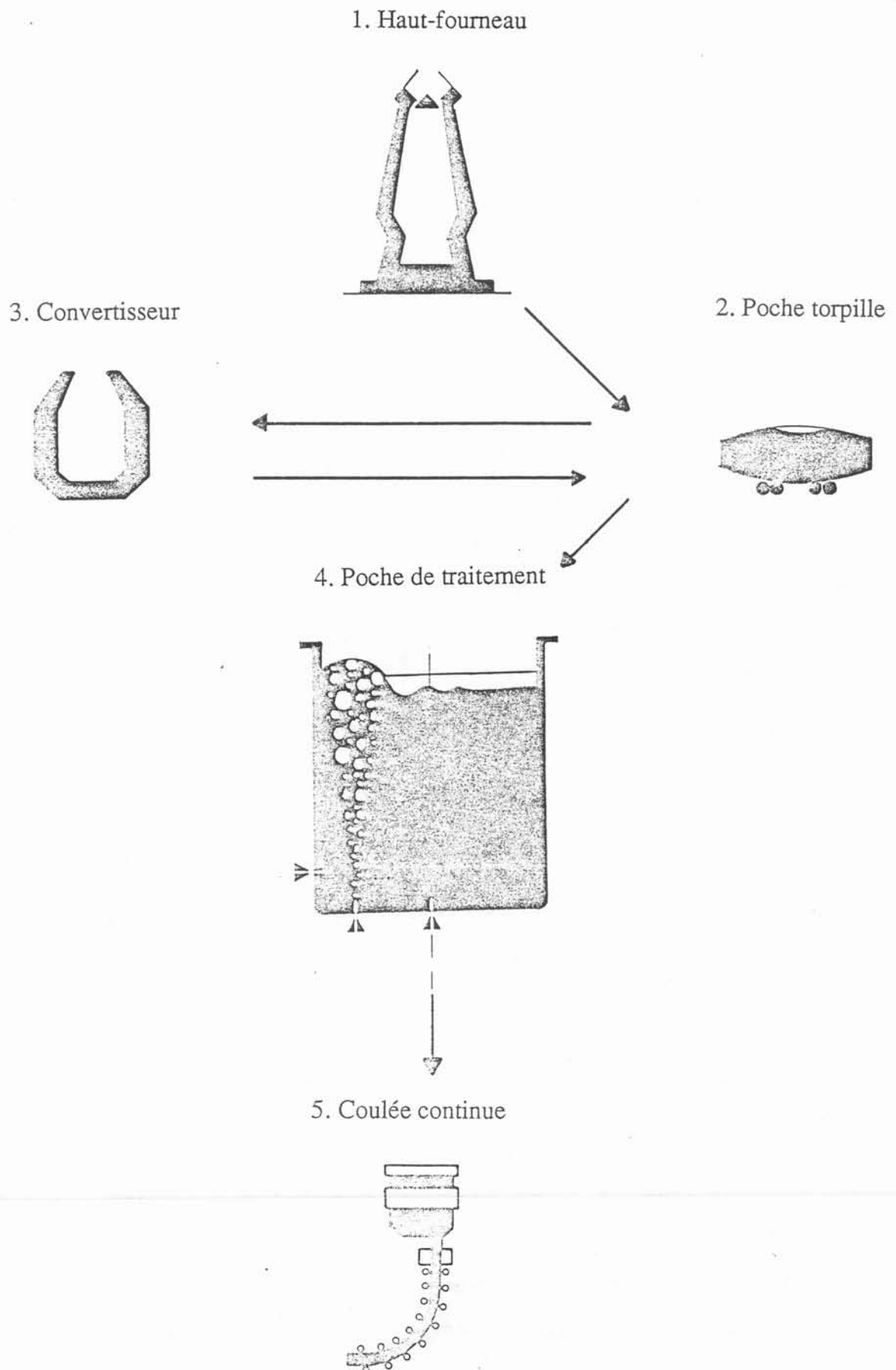
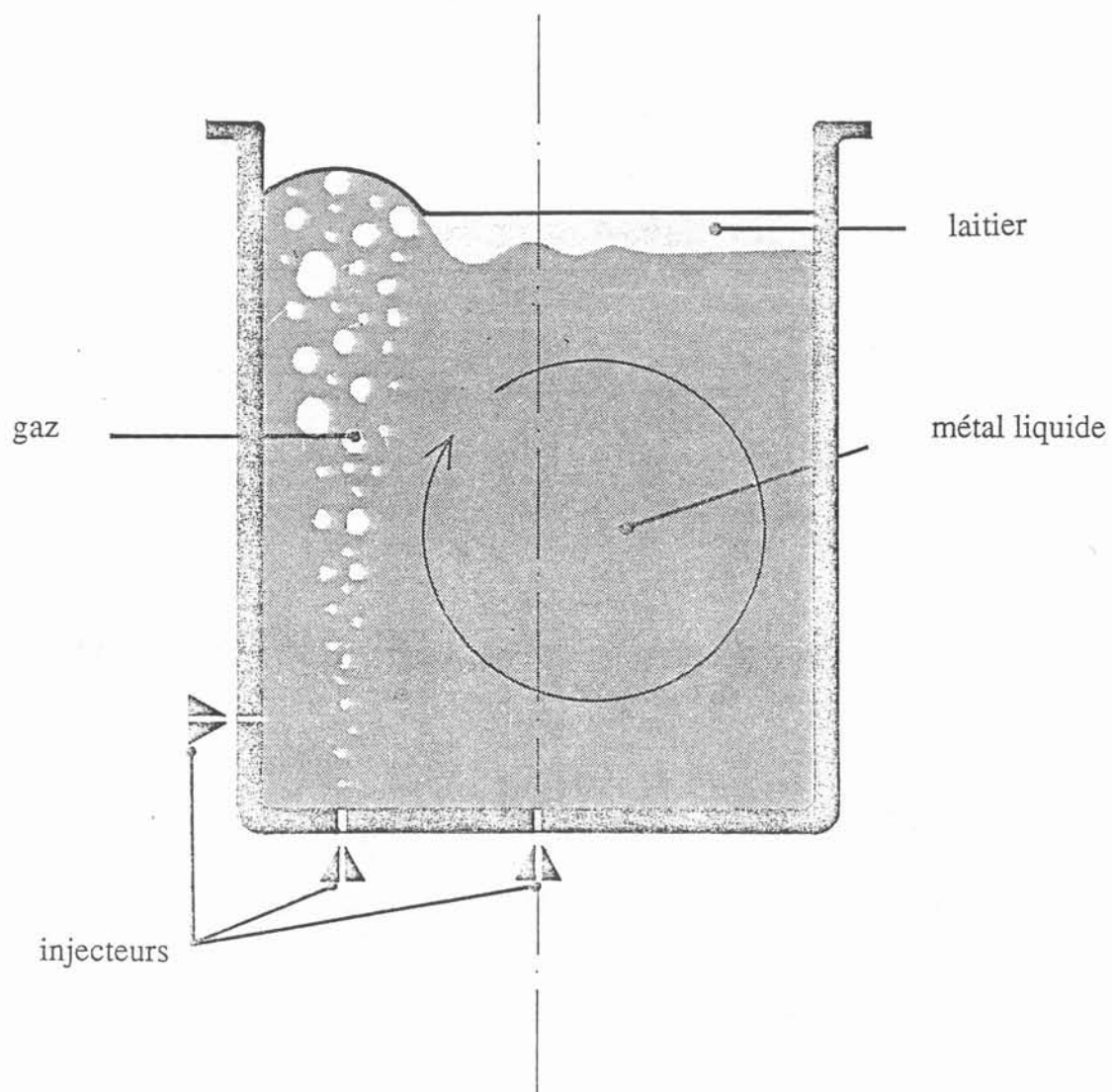


Figure 0.2 : Poche de traitement.



L'opération de métallurgie en poche correspondante consiste à affiner, à réaliser une mise à nuance et à chauffer l'acier. Ce dernier est brassé par injection de gaz soit à l'aide d'une lance plongée dans le métal, soit au moyen d'injecteurs disposés sur le fond de la cuve (excentrés à mi-rayon en général) ou sur la paroi latérale. Pratiquement, ces injecteurs ont la forme de bouchons poreux ou de tuyères.

- la coulée continue, précédant le laminage, met en jeu généralement des brasseurs électromagnétiques pour homogénéiser le métal pendant la coulée et obtenir ainsi une solidification équiaxe.

L'objectif général de cette étude est de développer un outil numérique destiné à dimensionner et optimiser les dispositifs de traitement en poche par bullage. Nous rappellerons les résultats et travaux antérieurs consacrés à ce sujet au cours de la première partie.

La seconde partie de ce rapport concerne les aspects hydrodynamiques du bullage. L'injection de gaz est, en principe, destinée à mettre en mouvement le métal liquide et créer une turbulence suffisamment importante pour accélérer les cinétiques de réactions, notamment à l'interface métal-laitier. Il est donc important d'analyser les transferts de quantité de mouvement entre le gaz et le liquide selon les conditions d'injection et la géométrie de la poche. Ce phénomène est d'une grande complexité. Nous avons choisi de l'étudier par le biais de la modélisation numérique. Nous nous sommes orientés vers les modèles dits "à deux phases" qui s'avèrent être à l'heure actuelle les plus performants.

La troisième partie est consacrée aux transferts de quantité de mouvement et de masse entre le métal et le laitier. Nous avons développé à cet effet un modèle simple mais réaliste de calcul du mouvement dans le laitier et du transfert de masse métal-laitier. La déformation de l'interface métal-laitier, les paramètres hydrodynamiques (vitesse, turbulence, ...) de la phase métal, nous le verrons, influencent directement le transfert de masse.

La présentation du code de calcul GALILAI, développé à partir des modèles théoriques, fait l'objet de la quatrième partie de ce mémoire. Ce programme se décompose en trois modules :

- calcul du mouvement dans le mélange métal-gaz,
- couplage hydrodynamique métal-laitier,
- transfert de masse métal-laitier.

Dans la cinquième partie, des mesures réalisées sur une maquette froide d'échelle réduite, simulant une poche réelle, nous ont servies pour valider le modèle.

Enfin l'extrapolation à des cas industriels est exposée dans la sixième partie. Des mesures de vitesses à l'intérieur des poches réelles étant à exclure pour des raisons de sécurité, la comparaison modèle-expérience portera uniquement sur les coefficients de transfert globaux.

La conclusion de ce mémoire fera ressortir les orientations à suivre pour compléter cette étude.

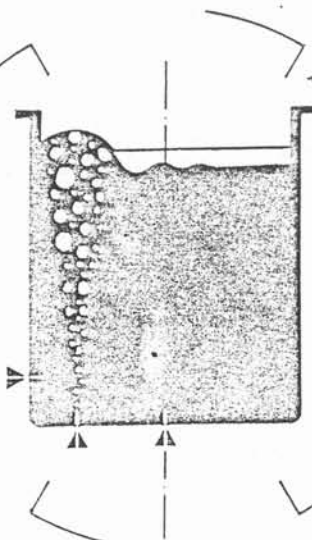
## Sommaire

Applications industrielles VI

Manipulations V

Modèle numérique IV

1 Etude bibliographique

11 Modèle d'écoulement  
à deux phases111 Transfert de quantité de  
mouvement et de masse  
avec le laitier



## CHAPITRE I

### Etude bibliographique

#### 1.1) Résultats expérimentaux

- 1.1.1) Transition "jetting-bubbling"
- 1.1.2) Régimes d'écoulement dans le bain
- 1.1.3) Bulles en écoulements turbulents
  - 1.1.3.1) géométrie de bulles
  - 1.1.3.2) fractionnement
  - 1.1.3.3) coalescence
- 1.1.4) Transfert de quantité de mouvement dans le laitier
- 1.1.5) Transfert de masse

#### 1.2) Modélisation

- 1.2.1) Modèles à une phase
- 1.2.2) Modèles à deux phases



## CHAPITRE I

### Etude bibliographique

Dans cette première partie, nous allons faire le point sur les recherches antérieures et dégager les résultats les plus importants concernant le brassage pneumatique, les transferts de masse métal-laitier et les différents types d'écoulements observables.

#### 1.1) Résultats expérimentaux

Avant de décrire le modèle développé dans le présent rapport, il est intéressant d'examiner brièvement la littérature sur le sujet.

Du point de vue expérimental, divers travaux ont mis en évidence quatre principaux phénomènes, à savoir :

- les divers régimes d'injection : "jetting-bubbling",
- les divers régimes d'écoulement du métal liquide,
- les divers régimes de transfert métal liquide-laitier et métal liquide-gaz,
- les phénomènes de fractionnement-coalescence.

##### 1.1.1) Transition "jetting-bubbling"

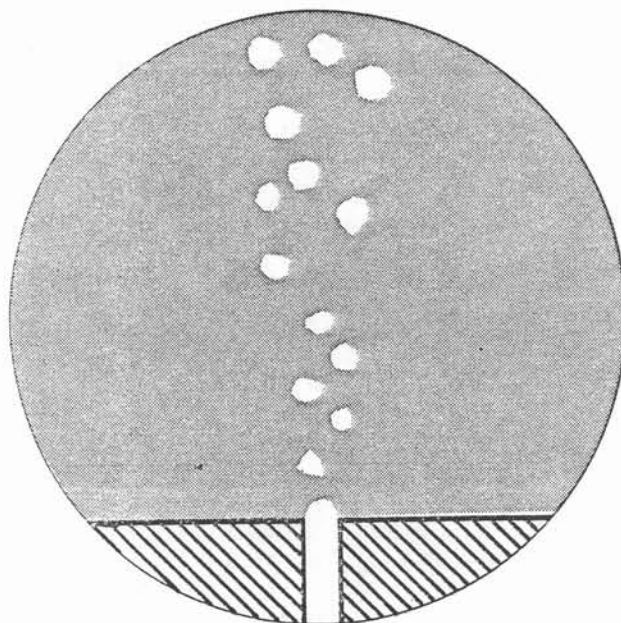
Pour les faibles débits d'injection de gaz, l'écoulement du gaz dans le liquide au voisinage de la tuyère est constitué par une succession de bulles qui se détachent de l'injecteur. Ce régime est appelé "*bubbling*". En revanche, lorsque le débit d'injection est élevé, nous observons près de l'injecteur un jet de gaz qui pénètre dans le liquide et se fractionne ensuite en petites bulles : nous sommes alors en "*jetting*" (cf figure 1.1).

Le critère de transition entre les deux régimes n'est pas encore parfaitement élucidé. Certains travaux assez anciens /1.1/ faisaient apparaître un paramètre quantifiant la transition : le nombre de Reynolds de l'injecteur. Pour d'autres, un nombre de Froude modifié permet de situer cette transition /1.5/. Des études plus récentes /1.2,1.4/ semblent montrer que la transition entre les deux régimes se produit lorsque le nombre de Mach de l'injecteur est supérieur à 1, l'apparition d'un col sonique dans la tuyère bloquant alors le débit de gaz.

Dans la zone de transition de régime, près de l'injecteur, nous pouvons observer que le diamètre des bulles ne dépend que du débit de gaz et pas des propriétés physiques ou géométriques /1.6/.

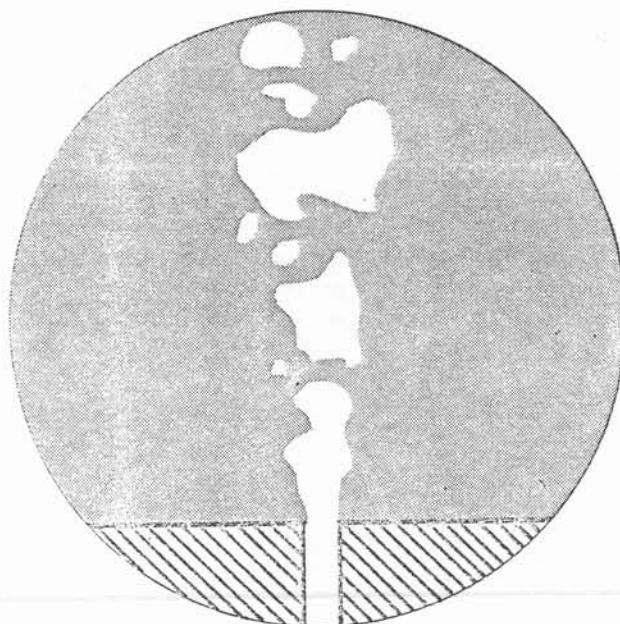


Figure 1.1 : Transistion bubbling-jetting.



bubbling

$Q_{\text{gaz}}$  faible



jetting

$Q_{\text{gaz}}$  fort

### 1.1.2) Régimes d'écoulement dans le bain

La vitesse du liquide croît lorsque le débit d'injection augmente. Des travaux anciens /1.7/ et d'autres récents /1.8/ montrent que la loi vitesse caractéristique du bain  $U$  en fonction du débit de gaz  $Q_g$  admet un changement de pente :

- pour  $Q_g$  faible :

$$U \sim Q_g^{1/2} \quad (1.1)$$

- pour  $Q_g$  fort :

$$U \sim Q_g^{1/3} \quad (1.2)$$

Le critère de transition entre les deux régions semble néanmoins encore flou. Le premier régime correspond en principe au cas où l'écoulement est laminaire et la loi (1.1) ne peut être valide que pour les très faibles débits de gaz, d'où une contradiction apparente avec les expériences d'Asai : l'écoulement est en effet laminaire en dehors du panache.

### 1.1.3) Bulles en écoulements turbulents

La géométrie des bulles de gaz joue un rôle important dans le coefficient de traînée (Annexe I) et dans les temps caractéristiques de collision inter-bulle (paragraphe 1.1.3.3). Intéressons nous donc en premier lieu aux variations de forme des bulles avant d'aborder les phénomènes de coalescence ou de fractionnement.

#### 1.1.3.1) géométrie de bulles

Dans un fluide au repos, les bulles de gaz peuvent se présenter sous quatre formes différentes :

- *sphère* : zone I, c'est le cas des écoulements où les forces d'inertie sont négligeables devant les forces visqueuses ou de tension interfaciale (faible nombre de Reynolds  $Re < 1$ ),

- *ellipse* : zone II, quand le rapport d'aspect est supérieur à 0.9,

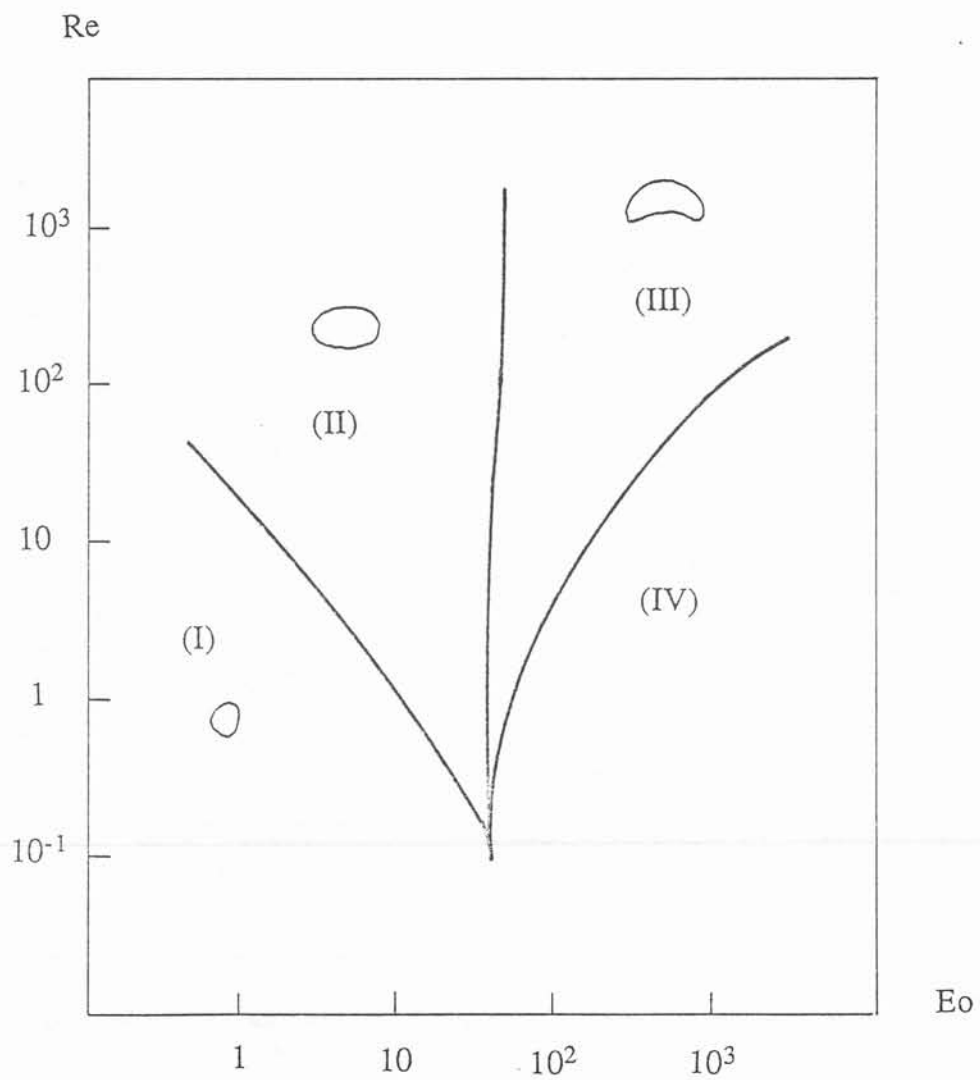
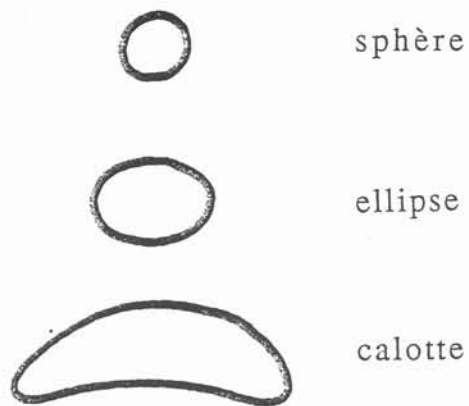
- *calotte* : zone III, représente des bulles larges, plates et non symétriques (grand nombre de Reynolds  $Re > 1000$  et grand nombre d'Eotvos  $Eo > 50$ ).

- *bulle déformée* : zone IV (très grands nombres de Reynolds et d'Eotvos).

Cette évolution de forme est fonction de paramètres géométriques, physiques et dynamiques. Une corrélation générale /1.1/ fournit la forme d'une bulle en fonction des nombres sans dimension d'Eotvos  $Eo$ , de Morton  $Mo$  et de Reynolds  $Re$  (figure 1.2). Rappelons l'expression de ces nombres :

$$Re = \frac{\rho_1 U d}{\mu_1} \quad Eo = \frac{g d^2 (\rho_1 - \rho_g)}{\gamma} \quad Mo = \frac{\rho \mu_1^4}{\rho_1 \gamma^3}$$

Figure 1.2 : Aspect d'une bulle.



avec

|          |                                     |
|----------|-------------------------------------|
| d        | diamètre de bulle,                  |
| g        | accélération de la pesanteur,       |
| $\gamma$ | tension interfaciale liquide-gaz,   |
| U        | vitesse caractéristique du liquide, |
| $\rho_l$ | masse volumique du liquide,         |
| $\rho_g$ | masse volumique du gaz,             |
| $\mu_l$  | viscosité dynamique du liquide.     |

Considérons le cas particulier de la cuve que nous présenterons au chapitre V. Les nombres de Reynolds et d'Eotvos valent alors :

$$Re = 10^3 \cdot 0.5 \cdot 10^{-2} / 10^{-1} = 50$$

$$Eo = 10 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 / 0.07 = 14$$

Ainsi devrions-nous observer des bulles à géométrie elliptique ou calottique.

#### 1.1.3.2) fractionnement

Une bulle de gaz dans un écoulement turbulent est soumise à diverses sollicitations qui tendent à la fractionner en bulles de diamètre plus petit. Si nous considérons une population de bulles dans cet écoulement turbulent et si ces bulles séjournent suffisamment longtemps dans le liquide, la dimension des bulles est inférieure à un diamètre dit maximum tel que /1.3/ :

$$d_{\max} = \frac{12 \gamma^{3/5}}{\pi \rho} \epsilon^{2/5} \quad (1.4)$$

avec

|            |  |
|------------|--|
| $\gamma$   | tension interfaciale liquide-gaz,                                    |
| $\rho$     | masse volumique du liquide,  |
| $\epsilon$ | dissipation turbulente qui représente le niveau d'agitation du bain, |
| $d_{\max}$ | diamètre maximum des bulles.   |

Il convient de noter que les phénomènes de fractionnement ne sont pas instantanés.

Dans le cas du bullage, il est probable que l'effet de fractionnement existe, néanmoins le temps de séjour des bulles dans la poche est trop court pour considérer l'émulsion établie. La relation ci-dessus, tout en fournissant une estimation du diamètre des bulles, ne peut être utilisée pour prédire localement la dimension moyenne des bulles. Evaluons l'ordre de grandeur du temps caractéristique de fractionnement par :

$$t_f \approx \frac{d}{u(d)} \approx \frac{d}{(\epsilon d)^{1/3}} \approx \frac{d^{2/3}}{\epsilon^{1/3}} \quad (1.5)$$

Ce temps est à comparer avec le temps de séjour d'une bulle dans le bain :

$$t_s \approx \frac{H}{U(d)} \quad (1.6)$$

Effectuons le rapport de ces deux échelles de temps :

$$t^* = \frac{t_s}{t_f} \approx \frac{H}{d} \frac{u(d)}{U(d)} \quad (1.7)$$

L'application numérique pour le cas d'une poche classique conduit au résultat suivant :

$$\frac{H}{d} \approx \frac{300 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} \quad \frac{u(d)}{U(d)} \approx \frac{0.1 \text{ m/s}}{1 \text{ m/s}} \quad \text{et} \quad t^* \approx 30$$

Ainsi, le fractionnement ne semble pas être très important dans les cuves de ce type.

#### 1.1.3.3) coalescence

Le phénomène de coalescence dépend lui-même de trois facteurs :

- la densité de bulles dans le liquide,
- le niveau d'agitation du liquide qui influe sur la probabilité de rencontre,
- le temps d'évacuation du film liquide entre deux bulles très voisines /1.9/.

Si les deux premiers facteurs sont assez bien identifiés et quantifiables, le troisième est difficilement prédictible. Le drainage du film fait intervenir beaucoup de phénomènes encore mal maîtrisés, à savoir :

- le comportement rhéologique de l'interface, viscosité d'interface etc...
- l'effet Marangoni dans le cas où la tension interfaciale admet des variations spatiales dues par exemple à la température, la présence de réaction chimique etc...

Les phénomènes de fractionnement et coalescence induisent des effets opposés. Aussi, dans une émulsion établie, la dimension moyenne des bulles tend-elle vers une taille d'équilibre qui correspond à un compromis entre ces deux effets.

#### 1.1.4) **Transfert de quantité de mouvement dans le laitier**

Il existe quelques études anciennes du mouvement induit dans une couche fluide de faible épaisseur par une paroi mobile ou un autre fluide en mouvement (voir Levich /1.10/ et Davies /1.25/). La vitesse  $U$  et la hauteur  $h$  du fluide sont calculées dans l'hypothèse de faible nombre de Reynolds, ce qui est le cas des laitiers (très visqueux en général).

Plus généralement, les observations de Levich permettent de différencier trois régimes d'écoulement du laitier suivant la valeur du nombre de Reynolds  $Re = Uh/v$  :

- $Re$  de 20 à 30      mouvement visqueux,
- $Re$  de 40 à 50      apparition de vagues,
- $Re = 1500$           mouvement turbulent.

Dans le cas extrême d'un film très mince, ce dernier peut se fractionner et donner naissance à des gouttelettes.

### 1.1.5) Transfert de masse

Assez souvent, dans les réactions métallurgiques, l'étape lente est le transfert de masse métal liquide-laitier. Certains auteurs /1.8/, en étudiant les transferts entre liquides, ont pu relier le temps de mélange  $\tau$  à la puissance spécifique de brassage  $\epsilon$  (qui n'est rien d'autre que le taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence) par des relations du type :

$$\tau \approx \epsilon^{-n} \quad (1.8)$$

La présence d'un laitier en surface a tendance à augmenter le temps de mélange car une partie de l'énergie que le gaz transmet au liquide est "*dissipée*" dans le laitier. Nous verrons (§5.5.12) effectivement que le laitier est mis en mouvement, qu'il est repoussé vers la paroi de la cuve et que son interface avec le métal est particulièrement déformée.

Les transferts gaz-métal ont été étudiés théoriquement et expérimentalement par Bessho /3.1/ à l'aide d'un modèle eau-dioxyde de carbone. Le coefficient de transfert obtenu est le même en tout point de la cuve, bien que les profils instantanés de concentration ne soient pas uniformes.

D'autre part, la turbulence créée par le brassage pneumatique augmente à la fois la turbulence au voisinage de l'interface et la cinétique des réactions en augmentant considérablement la surface d'échange entre métal liquide et laitier /1.11/. Il existe de la même façon une relation entre le coefficient de transfert et le débit-masse du gaz :

$$K \approx Q^n \quad (1.9)$$

Mais nous pouvons observer une transition du régime de transfert avec le débit de gaz injecté. Certains auteurs l'expliquent par l'apparition d'une émulsion métal-laitier qui provoque un brusque et important accroissement de la surface interfaciale (voir Asai /1.26/). D'autres auteurs attribuent cette transition à une augmentation de la température du laitier.

McNallan et King /1.12/ ont proposé à partir d'observations une valeur de débit-masse de gaz de :

$$Q_g = 40 \text{ g cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

comme critère de transition. D'autre part, il a été observé que plus les injecteurs sont décentrés, plus courts sont les temps de mélange et plus lentes sont les cinétiques de transfert /1.11/. Quand un injecteur est excentré, l'écoulement est plus uniforme et occupe réellement toute la cuve. Il n'y a pas de zone morte à coeur. Il est clair ainsi que

dans ces conditions les temps de mélange sont réduits.

Pour finir, illustrons de façon concrète ces propos en considérant simplement deux réactions typiques d'affinages de métaux réalisées couramment :

- désoxydation : l'aluminium et le silicium peuvent réagir avec l'oxygène et former des précipités légers :



- désulfuration : le soufre en solution dans le métal réagit avec le calcium du laitier pour donner du sulfure de calcium suivant la réaction :



## 1.2) Modélisation

### 1.2.1) Modèles à une phase

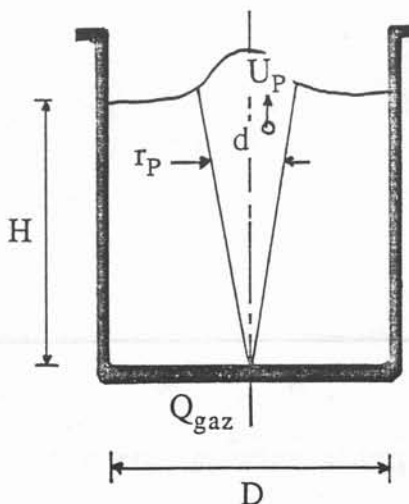
La mise en mouvement d'un liquide par un gaz s'explique par la différence de masse volumique entre les régions riches et les régions pauvres en bulles. Avec ce type de modèle, les mouvements des deux fluides sont découplés. L'action motrice du gaz est directement introduite dans le bilan de quantité de mouvement du liquide par une force de volume (Poussée d'Archimède équivalente) qui s'écrit :

$$f = (\alpha \rho_g + (1 - \alpha) \rho_l) g \quad (1.10)$$

Le problème consiste alors à évaluer le taux de présence du gaz  $\alpha$  dans le panache. C'est généralement une fonction des paramètres suivants :

- débit de gaz injecté  $Q_g$ ,
- diamètre moyen des bulles  $d$ ,
- géométrie du panache  $r_p$ ,
- vitesse caractéristique  $U_p$ .

$$\alpha = \alpha(Q_g, d, r_p, U_p)$$



La vitesse d'ascension libre des bulles pour certains /1.13,1.14/ ou la vitesse moyenne de panache pour d'autres /1.15,1.16/ sont souvent choisies comme vitesse caractéristique  $U_p$  du panache. En dehors du panache, ces modèles sont la plupart du temps des modèles classiques d'écoulements monophasiques bidimensionnels turbulents à fermeture en un point du type k- $\epsilon$ .

La simplicité de ces modèles est contrebalancée par leur faiblesse de prédiction essentiellement due à l'introduction d'informations à priori inconnues et même recherchées telles que la géométrie du panache et l'action du gaz sur le liquide. Ainsi il paraît inconcevable d'imaginer à priori la forme du panache pour une injection excentrée ou même latérale, pour laquelle l'écoulement résultant est purement tridimensionnel.

Pour ces raisons, il est difficile de qualifier les modèles à une phase de modèles prédictifs.

## 1.2.2) Modèles à deux phases

Le modèle homogène ou de mélange est souvent utilisé pour calculer des écoulements à double phase. Il suppose néanmoins l'équilibre thermique et mécanique entre les deux phases, ce qui est trop souvent restrictif. Donc une approche plus complexe est nécessaire afin de prédire les propriétés locales et globales de ces écoulements.

En fait, deux méthodes peuvent être utilisées :

- la méthode multi-fluide (approche eulérienne),
- la méthode des trajectoires (approche lagrangienne).

La méthode double fluide met en oeuvre des opérations de moyenne sur les équations régissant les mouvements de la phase continue et de la phase dispersée, en introduisant le concept de milieu équivalent (macroscopiquement continu). La littérature est fournie en de tels modèles..., comme nous allons le voir.

Cette méthode fondée sur les modèles à deux fluides présente l'avantage de pouvoir utiliser les méthodes de résolution numériques déjà mises en oeuvre pour les écoulements monophasiques. Mais l'étude et la prise en compte, par exemple, d'une répartition de taille de bulles (ou de particules) alourdit considérablement le modèle (car chaque taille sera représentée par une phase) et augmente par conséquent les temps de calculs, comme dans le modèle d'Elghobashi /1.17,1.18/. Certains auteurs /1.19,1.20/ au contraire considèrent une équation de conservation d'une densité de nombre de bulles comprenant les contributions du fractionnement et de la coalescence.

Une approche lagrangienne du problème est également envisageable : c'est par exemple le modèle "PSI-cell". Il nécessite néanmoins dans tous les cas le calcul du terme source supplémentaire créé par la présence des bulles dans la phase continue (cf /1.21/).

Dans le cas d'écoulements turbulents, le modèle développé doit prendre en compte les interactions (turbulentes) au niveau de l'interface entre les deux phases. La présence de la phase dispersée dans la phase continue modifie à la fois les grandeurs moyennes caractéristiques de l'écoulement et la turbulence de la phase continue, comme peuvent le montrer les expériences réalisées par Lance /1.22/.

Il existe deux "écoles" préconisant chacune une méthode pour obtenir les équations moyennées. La première "école" préconise l'application de deux opérateurs distincts /1.17,1.18/ :



- moyenne de phase :

EQUATIONS LOCALES INSTANTANÉES ----> EQUATIONS MOYENNES INSTANTANÉES

- moyenne statistique :

EQUATIONS MOYENNES INSTANTANÉES ----> EQUATIONS MOYENNES

Après une opération de moyenne de phase "classique" des équations locales instantanées, nous aboutissons aux équations de conservation des grandeurs instantanées de chaque milieu. Il est à noter que si nous utilisons l'opérateur de moyenne spatiale, le volume d'intégration doit être choisi suffisamment petit par rapport aux dimensions caractéristiques de l'installation, mais également suffisamment grand par rapport à la taille des bulles, ce qui est souvent incompatible avec la physique du phénomène et en particulier en bullage. Après quoi, chaque variable est décomposée en partie moyenne et partie fluctuante. Une moyenne statistique nous conduit aux équations de transport pour l'écoulement moyen de chaque milieu équivalent. Généralement, la fermeture de ces équations est réalisée par l'intermédiaire d'une viscosité tourbillonnaire. Deux équations de transport supplémentaires pour l'énergie cinétique de la turbulence  $k$  et pour son taux de dissipation  $\varepsilon$  sont introduites. Elghobashi /1.17/ s'est attaché à écrire les équations exactes et à modéliser à l'ordre trois ensuite les corrélations qui y apparaissent. Il a ainsi introduit de nouvelles constantes par rapport au modèle standard (initial)  $k$ - $\varepsilon$  de Launder et Spalding. Si son modèle a été appliqué avec succès au calcul de jets gaz-particules et gaz-gouttes, il ne reste valable que pour des écoulements bidimensionnels paraboliques dispersés, sans changement de phase. Il présente en outre le défaut d'être très lourd. Ceci résulte de la prise en compte des fluctuations de taux de présence. De plus, les constantes introduites dans la modélisation ne sont pas universelles a priori. Ce modèle enfin n'est peut être pas applicable au calcul d'écoulements elliptiques (recirculants), pour lesquels existent de forts gradients de pression ainsi que des parois.

A partir de ce travail, Dobrowolski /1.23/ a récemment proposé un modèle de calcul d'écoulements bidimensionnels elliptiques avec changement de phase, considérablement plus simple et dans lequel les fluctuations du taux de présence sont négligées en raison des faibles valeurs du taux de présence de la phase dispersée. Ce modèle semble pour le moment limité aussi à des particules de faibles tailles.

Enfin, en écoulements turbulents le diamètre des bulles est très supérieur à l'échelle de Kolmogorov : les deux moyennes ne sont ainsi donc pas indépendantes, sauf si le diamètre des bulles tend vers zéro. Cette constatation rend impossible l'utilisation d'une telle méthode pour traiter notre problème, et ceci d'autant plus que la phase dite dispersée n'est pas vraiment dispersée en bullage.

La seconde "école" /1.19,1.24/ n'utilise qu'une opération de moyenne pour obtenir les équations moyennées :

- moyenne statistique de phase :

EQUATIONS LOCALES INSTANTANÉES ----> EQUATIONS MOYENNES

L'avantage de cet opérateur réside dans le fait qu'il introduit des grandeurs directement comparables à celles que nous pouvons mesurer expérimentalement. Cette méthode introduit des fonctions généralisées et ne procède pas comme précédemment à une homogénéisation, restrictive et contraignante des équations. Les équations moyennées sont directement obtenues par cette méthode. Un terme additionnel, dont l'effet sur l'expansion du panache est primordial, apparaît dans l'expression du terme de transfert de quantité de mouvement à l'interface (cf §2.4.2 et §2.4.3). Il faut signaler aussi que dans ce cas l'hypothèse de phase gazeuse dispersée n'est pas indispensable, ce

qui correspond exactement au problème posé. De plus, le concept de fluctuation de taux de présence n'intervient pas ici.

En conclusion, notons enfin que ces deux démarches permettant de construire des équations pour les deux phases sont équivalentes dans la limite où le diamètre des bulles tend vers zéro. Nous avons opté pour la moyenne statistique de phase que nous décrirons au chapitre II, car celle-ci nous semblait bien mieux adaptée à notre problème.



## CHAPITRE II

### Le modèle à deux phases pour le métal liquide

#### 2.1) Equations locales instantanées

#### 2.2) Moyenne statistique de phase

##### 2.2.1) Opérateur de moyenne

##### 2.2.2) Fonction de phase et valeurs moyennes

#### 2.3) Equations moyennes instantanées

##### 2.3.1) Hypothèses et méthode

##### 2.3.2) Equations

#### 2.4) Lois constitutives

##### 2.4.1) Tenseur des contraintes visqueuses

##### 2.4.2) La force de couplage

##### 2.4.3) Vitesse de glissement

##### 2.4.4) Modèle de turbulence

###### 2.4.4.1) le tenseur des contraintes turbulentes

###### 2.4.4.2) fermeture en un point

###### 2.4.4.2.1) énergie cinétique de la turbulence

###### 2.4.4.2.2) taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence

###### 2.4.4.2.3) le modèle retenu

##### 2.4.5) Transfert de masse métal-gaz

#### 2.5) Discussion des ordres de grandeur

#### 2.6) Système final



## CHAPITRE II

### Le modèle à deux phases pour le métal liquide

Nous allons décrire le modèle à deux phases que nous avons construit et utilisé pour décrire les mouvements dans le métal liquide.

Ce type de modèle a déjà fait l'objet de plusieurs publications /1.19,1.22,1.24,2.3,2.5,2.8/. Dans le présent rapport, nous rappellerons les principaux aspects de ce type de modèle (obtention des équations moyennes), puis nous décrirons les simplifications effectuées et la rhéologie choisie compte tenu de notre configuration : le brassage pneumatique en poche de traitement. Le couplage entre les deux phases et la turbulence dans la phase continue seront plus particulièrement étudiés.

#### 2.1) Equations locales instantanées

Les équations décrivant localement le mouvement de chaque fluide, dans le domaine qu'ils occupent sont les suivantes (voir /2.1/, figure 2.1) :

- équation de continuité de la phase k :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_k) + \text{div}(\rho_k \mathbf{u}^k) = 0 \quad (2.1)$$

- bilan de quantité de mouvement de la phase k :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_k \mathbf{u}^k) + \text{div}(\rho_k \mathbf{u}^k \mathbf{u}^k) = \text{div} \mathbf{T}^k + \rho_k \mathbf{f}^k \quad (2.2)$$

où  $\rho$  masse volumique,  
 $\mathbf{u}$  vitesse instantanée,  
 $\mathbf{T}$  tenseur des contraintes,  
 $\mathbf{f}$  force volumique.

Les conditions de saut à l'interface, traduisant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement s'écrivent /2.2/ :

$$[[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}]] = 0 \quad (2.3)$$

$$[[\rho_k(\mathbf{u} - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}]] = \gamma \kappa \mathbf{n} \quad (2.4)$$

où  $\mathbf{u}_i$  vitesse de l'interface,  
 $\gamma$  tension interfaciale métal-gaz,  
 $\kappa$  courbure de l'interface,  
 $[[ \ ]]$  différence entre les valeurs de la phase 1 et de la phase 2,  
 $\mathbf{n}$  normale extérieure à l'interface.

Figure 2.1 : Mouvements à l'échelle locale.

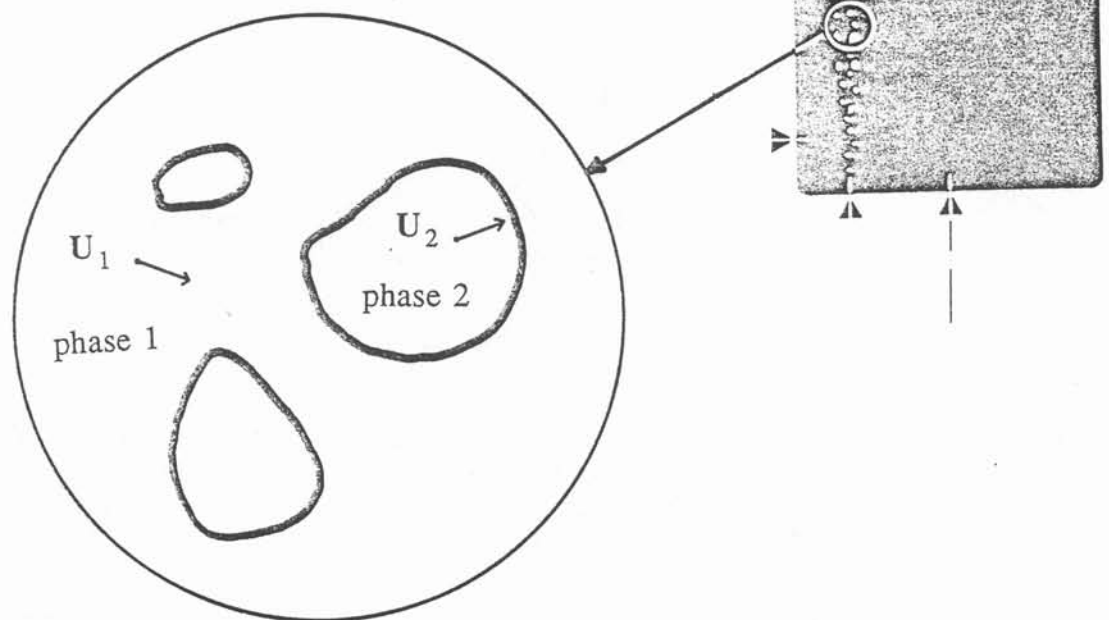
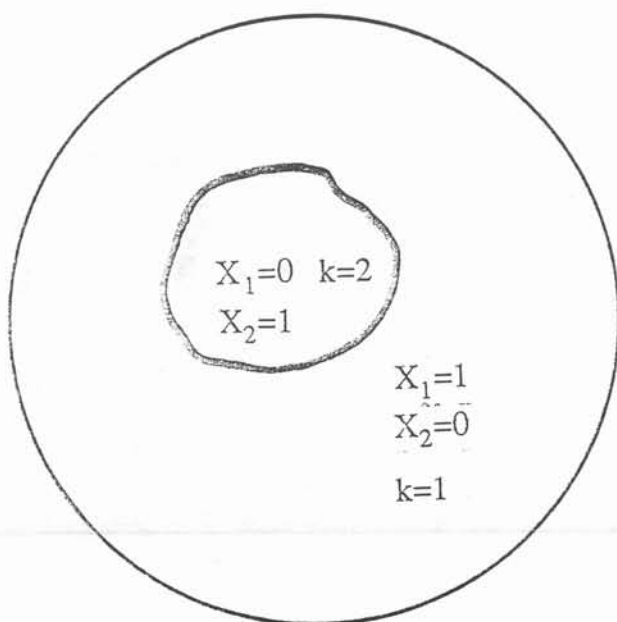


Figure 2.2 : Fonction de phase.



## 2.2) Moyenne statistique de phase

Rappelons brièvement la procédure classique d'obtention des équations moyennes (voir Drew /1.24/).

Avant de réaliser la moyenne statistique de phase des équations de transport, il nous faut introduire une fonction dite de phase, pour différencier une phase de l'autre.

### 2.2.1) Opérateur de moyenne

L'opérateur utilisé, noté ici  $\langle \rangle$ , est l'opérateur de moyenne statistique sur le nombre de réalisation de l'écoulement. Il vérifie les propriétés classiques de linéarité et de commutativité avec les opérateurs différentiels /1.24/ :

- les règles de Reynolds :

$$\begin{aligned}\langle f + g \rangle &= \langle f \rangle + \langle g \rangle \\ \langle \langle f \rangle g \rangle &= \langle f \rangle \langle g \rangle \\ \langle c \rangle &= c\end{aligned}$$

- la règle de Leibniz :

$$\langle f_{,t} \rangle = \langle f \rangle_{,t}$$

- la règle de Gauss :

$$\langle f_{,i} \rangle = \langle f \rangle_{,i} \quad i = 1, 2, 3$$

où  $c$ ,  $f$  et  $g$  sont une constante et des vecteurs ou tenseurs quelconques.

### 2.2.2) Fonction de phase et valeurs moyennes

Définissons la fonction de phase  $X_k(x,t)$  sur la figure 2.2 par :

$$X_k(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est dans la phase } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.5)$$

Cette distribution a les propriétés suivantes /1.22,1.24/ :

$$X_{k,t} + u_i \cdot X_{k,i} = 0 \quad (2.6)$$

$$X_{k,i} = n_k \frac{\partial X}{\partial n} \quad (2.7)$$

Différents types de grandeurs moyennées sont introduites :

- la fraction volumique (taux de présence) de la phase  $k$  est la moyenne de la fonction de phase :

$$\alpha_k = \langle X_k \rangle$$



- l'aire interfaciale moyenne par unité de volume est :

$$s = \left\langle \frac{\partial X}{\partial n} \right\rangle$$

- la moyenne de phase, appliquée aux propriétés physiques des fluides telles que viscosité, masse volumique, pression, tension interfaciale ..., est la moyenne de cette grandeur pondérée par la fonction de phase :

$$\tilde{f}_k = \frac{\langle X_k f \rangle}{\alpha_k} = \frac{\langle f \rangle_k}{\alpha_k}$$

- la moyenne massique de phase, appliquée essentiellement aux vecteurs et tenseurs tels que vitesse, tenseur des contraintes ..., est la moyenne d'une telle variable pondérée par la fonction de phase et la masse volumique :

$$\frac{\Delta}{f}_k = \frac{\langle X_k \rho f \rangle}{\alpha_k \tilde{\rho}_k} = \frac{\langle \rho f \rangle_k}{\alpha_k \tilde{\rho}_k}$$

Pour simplifier l'écriture sans pour autant entraîner d'ambiguïté, nous ne ferons plus la distinction de notation entre une variable locale et ses moyennes de phase ou massique.

## 2.3) Equations moyennes instantanées

Le détail de cette opération de moyenne n'est pas décrit dans le présent rapport pour des raisons de clarté. Nous donnons simplement la méthode à suivre ainsi que les équations moyennées obtenues en laissant le lecteur se reporter à Simonin et Viollet /2.3/, Drew /1.24/ ou Lance /1.22/.

### 2.3.1) Hypothèses et méthode

Le principe d'obtention des équations moyennées est simple. Chaque équation locale instantanée, multipliée par la fonction de phase  $X_k$ , est moyennée. Cette méthode suppose un certain nombre d'hypothèses limitatives :

- les deux milieux équivalents introduits se comportent macroscopiquement comme des milieux continus,
- le gaz (phase dispersée) se présente sous la forme d'un ensemble de bulles,
- par la suite, seuls les écoulements permanents seront envisagés. Le transport de contaminant pourra néanmoins être étudié en régime instationnaire car le phénomène évolutif est relativement lent.

Les remarques du paragraphe 2.2 sont utilisées pour obtenir les équations moyennes décrites ci-après.

### 2.3.2) Equations

Ecrivons maintenant le système d'équations que nous obtenons après l'opération de moyenne (figure 2.3) :

- équation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k) + \text{div} (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}^k) = \Gamma_k \quad (2.6)$$

Le terme  $\Gamma_k$  représente le transfert de masse à l'interface entre les deux phases.

- bilan de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}^k) + \text{div} (\alpha_k \rho_k \mathbf{u}^k \mathbf{u}^k) = & - \alpha_k \text{grad } p_k + \text{div} (\alpha_k (\boldsymbol{\tau}^k + \boldsymbol{\sigma}^k)) + \Gamma_k \mathbf{v}_{ki} \\ (1) \quad & (2) \quad (3) \quad (4) \quad (5) \quad (6) \\ & + \mathbf{M}^k + \alpha_k \rho_k \mathbf{f}^k \quad (2.7) \\ & (7) \quad (8) \end{aligned}$$

$k$  désignant la phase liquide ou gaz.

Nous reconnaissons dans ce bilan de quantité de mouvement les termes :

- (1) : de variation temporelle,
- (2) : d'inertie,
- (3) : de pression,
- (4) : de diffusion moléculaire,
- (5) : de diffusion turbulente,
- (8) : de forces de volume.

Apparaissent de surcroît de nouveaux termes liés à la présence de la seconde phase :

(6) : une production de quantité de mouvement due à la production de masse à l'interface,

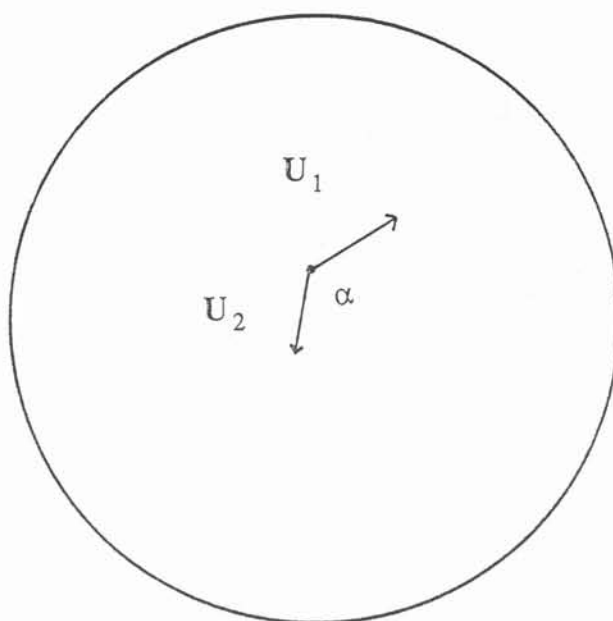
(7) : une source de quantité de mouvement interfaciale (ou encore densité de force interfaciale), qui fait généralement intervenir les forces de traînée, de d'accélération et de poussée.

### 2.4) Lois constitutives

Ce paragraphe est consacré à la rhéologie des fluides équivalents. Il nous faut exprimer les tenseurs des contraintes visqueuses et turbulentes, la densité de force interfaciale, les différentes pressions en fonction d'invariants (scalaires, vecteurs et tenseurs objectifs) tels que :

- le taux de présence,
- la vitesse de glissement,

Figure 2.3 : Fluides équivalents.



- les propriétés physiques ou géométriques,
- des tenseurs construits à partir de ces grandeurs.....

Aussi allons-nous exposer nos choix en matière de rhéologie.

#### 2.4.1) Tenseur des contraintes visqueuses

Nous utilisons un modèle newtonien pour exprimer le tenseur des contraintes visqueuses  $\tau$  :

$$\tau_{ij}^k = \mu_k (u_{i,j}^k + u_{j,i}^k) \quad (2.8)$$

( pas de sommation sur k )

avec  $\mu_k$  la viscosité moléculaire de la phase k.

#### 2.4.2) La force de couplage

Une force de traînée équivalente est utilisée pour exprimer le terme de couplage  $M$  entre les deux phases (voir Annexe II) :

$$M^g = -\alpha_g \rho_l F V^r \quad (2.9)$$

Cette force de traînée équivalente est proportionnelle à la vitesse relative  $V^r$  (voir §2.4.3) et au coefficient de frottement interfacial  $F$  que nous calculons généralement par :

$$F = \frac{3}{4d} C_d (Re, \alpha_g) |V^r| \quad (2.10)$$

Le coefficient de traînée est représenté par la fonction suivante :

$$\begin{aligned} Re < 200 & \quad C_d = \frac{24}{Re} (1 + 0.15 Re^{0.687}) \\ Re > 200 & \quad C_d = 0.44 \end{aligned} \quad (2.11)$$

#### 2.4.3) Vitesse de glissement

La force de couplage fait intervenir la vitesse relative moyenne entre les deux phases, qui n'est pas exactement égale à la différence des vitesses moyennes des deux phases. La valeur moyenne  $V^r$  de la vitesse relative locale entre une bulle et le liquide environnant s'exprime en fonction de la vitesse moyenne relative des deux fluides équivalents  $U_{gl}^1$ , appelée vitesse de glissement avec un terme correctif  $V^d$  appelé vitesse de dérive des bulles dépendant des interactions entre les bulles dans le liquide et de la turbulence locale (cf Simonin et Viollet /2.3/) :

$$U^g - U^l = U^{gl} = V^r + V^d$$

La vitesse de dérive s'exprime sous la forme d'une loi de Fick :

$$\text{avec } V^d = - \frac{V^t}{\alpha_g} \text{ grad } \alpha_g \quad \text{et} \quad v_{\alpha}^t = \frac{\mu_1^t}{\rho_1 \sigma_{\alpha}} \quad (2.12)$$

Le nombre de Schmidt de dérive  $\sigma_{\alpha}$  est à priori une fonction principalement :

des paramètres de la turbulence :  $k, \varepsilon$ ,  
de la dimension des bulles :  $d$ ,  
du taux de présence du gaz :  $\alpha$ ,

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\alpha}(k, \varepsilon, d, \alpha)$$

La force induite sur la phase continue par cette correction de la vitesse relative moyenne s'écrit :

$$M = \mu_1 F \frac{\text{grad } \alpha_g}{\sigma_{\alpha}}$$

Il est clair ainsi que cette force va contrôler l'expansion du panache. Elle d'autant plus importante que le gradient de taux de présence du gaz est grand. Nous pouvons également mesurer l'importance du nombre de Schmidt de dérive.

Dans le modèle présenté, le paramètre  $\sigma_{\alpha}$  est supposé constant. La valeur retenue est de 0.4. Au chapitre V, nous montrerons le rôle joué par cette force (cf §5.5.1).

#### 2.4.4) Modèle de turbulence

Le problème de la fermeture des équations de transport consiste à exprimer les tenseurs inconnus et les corrélations turbulentes à l'aide des grandeurs moyennes et des paramètres de la turbulence. La plupart des modèles de turbulence pour les écoulements diphasiques sont directement issus des modèles de turbulence pour les écoulements monophasiques. Les modifications apportées ne permettent néanmoins pas de prédire correctement les caractéristiques de ces écoulements diphasiques en raison de leur extrême complexité.

Cette partie est donc consacrée à la description d'un modèle de turbulence propre aux écoulements diphasiques ainsi qu'à l'évaluation des simplifications possibles et des termes dominants.

Le but est de développer un modèle de turbulence aussi général et économique que possible. Nous nous sommes orientés vers un modèle à viscosité tourbillonnaire (à fermeture en un point du type  $k-\varepsilon$  /2.4/).

##### 2.4.4.1) le tenseur des contraintes turbulentes

Le tenseur des contraintes turbulentes  $\sigma$  dans le liquide (phase continue) est calculé à l'aide d'une hypothèse de Prandtl-Kolmogorov :

$$\sigma_{ij}^l = -\langle \rho u_i^l u_j^l \rangle = \mu_1^t (u_{i,j}^l + u_{j,i}^l) - \frac{2}{3} \delta_{ij} (\rho_k k + \mu_1^t u_{m,m}^l) \quad (2.13)$$

avec  $\mu_1^t$  la viscosité tourbillonnaire de la phase liquide (continue).

Il est à noter que l'énergie cinétique turbulente  $k$  du liquide est définie par :

$$\rho_1 k = \frac{1}{2} \langle \rho u_i^l u_i^l \rangle \quad (2.14)$$

Par analogie, le tenseur des contraintes turbulentes dans le gaz (phase dispersée) est donné par :

$$\sigma_{ij}^g = -\langle \rho u_i^g u_j^g \rangle = \mu_g^t (u_{i,j}^g + u_{j,i}^g) \quad (2.15)$$

Les viscosités effectives sont enfin calculées ainsi :

$$\begin{aligned} \mu_1^e &= \mu_1 + \mu_1^t = \mu_1 + C_\mu \rho_1 \frac{k^2}{\varepsilon} \\ \mu_g^e &= \mu_g + \mu_1^e \frac{\rho_g}{\rho_1 \sigma_p} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Nous introduisons un nombre de Schmidt de bulle  $\sigma_p$  :

$$\sigma_p = \frac{v_g^t}{v_l^t} \quad (2.17)$$

pour calculer la viscosité turbulente du gaz. Dans le présent modèle, ce nombre de Schmidt est pris égal à l'unité. Certains auteurs [1.17,2.6] font remarquer que les bulles ne suivent pas exactement le mouvement du fluide et introduisent des échelles de temps et de longueur de la turbulence pour le calculer. Mais une étude d'ordre de grandeur nous montrera que les forces de contraintes visqueuses et turbulentes sont négligeables dans le bilan de quantité de mouvement du gaz (cf §2.5).

#### 2.4.4.2) fermeture en un point

Deux équations de transport pour l'énergie cinétique de la turbulence et son taux de dissipation sont ajoutées pour fermer le système :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_1 \rho_1 u_i^l k) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha_1 \frac{\mu_1^e}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \alpha_1 (G - \rho_1 \varepsilon) + S_p^k \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_1 \rho_1 u_i^1 \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha_1 \frac{\mu_1^e}{\sigma_e} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + \alpha_1 \frac{\varepsilon}{k} (C_1 G - C_2 \rho_1 \varepsilon) + S_p^e \quad (2.19)$$

Le terme de production d'énergie cinétique s'écrit classiquement :

$$G = -\sigma_{ij}^1 u_{i,j}^1 = \mu_1^t e_{ij}^1 e_{ij}^1 - \frac{2}{3} (\rho_1 k + \mu_1^t \operatorname{div} u^1) \operatorname{div} u^1 \quad (2.20)$$

où le tenseur des déformations  $e$  est donné par :

$$e_{ij}^k = \frac{1}{2} (u_{i,j}^k + u_{j,i}^k) \quad (2.21)$$

Nous observons que les équations 2.18 et 2.19 comprennent chacune un terme source nouveau par rapport aux équations classiques /2.4/. Ces termes traduisent l'influence de la phase dispersée sur le liquide qui se réalise via le terme de transfert de quantité de mouvement à l'interface. Dans notre configuration, nous avons souligné que les bulles ont une taille importante (diamètre de l'ordre du centimètre) par rapport aux tourbillons énergétiques, excluant toute simplification visant à découpler la turbulence dans le liquide du mouvement des bulles. De plus, le taux de présence de la phase dispersée est très important dans le panache : il décroît de 1 près de l'injecteur à quelques pourcents près de la surface libre. Ceci nous conduit à proposer un modèle très simple, schématisé figure 2.4, dérivé de celui que propose Simonin et Viollet /2.3,2.5/.

#### 2.4.4.2.1) énergie cinétique de la turbulence

Le terme  $S_p^k$ , dans l'équation de transport de l'énergie cinétique de la turbulence 2.18 est donné par :

$$S_p^k = \alpha_g \rho_1 F < u_i^{l'} v_i^{r'} > \quad (2.22)$$

C'est un terme de production d'énergie cinétique de la turbulence résultant de l'agitation des bulles (chocs inter-bulles, vitesses élevées) et de leur sillage.

La corrélation reliant les fluctuations de la vitesse du liquide et celles de la vitesse relative est calculée de la façon suivante :

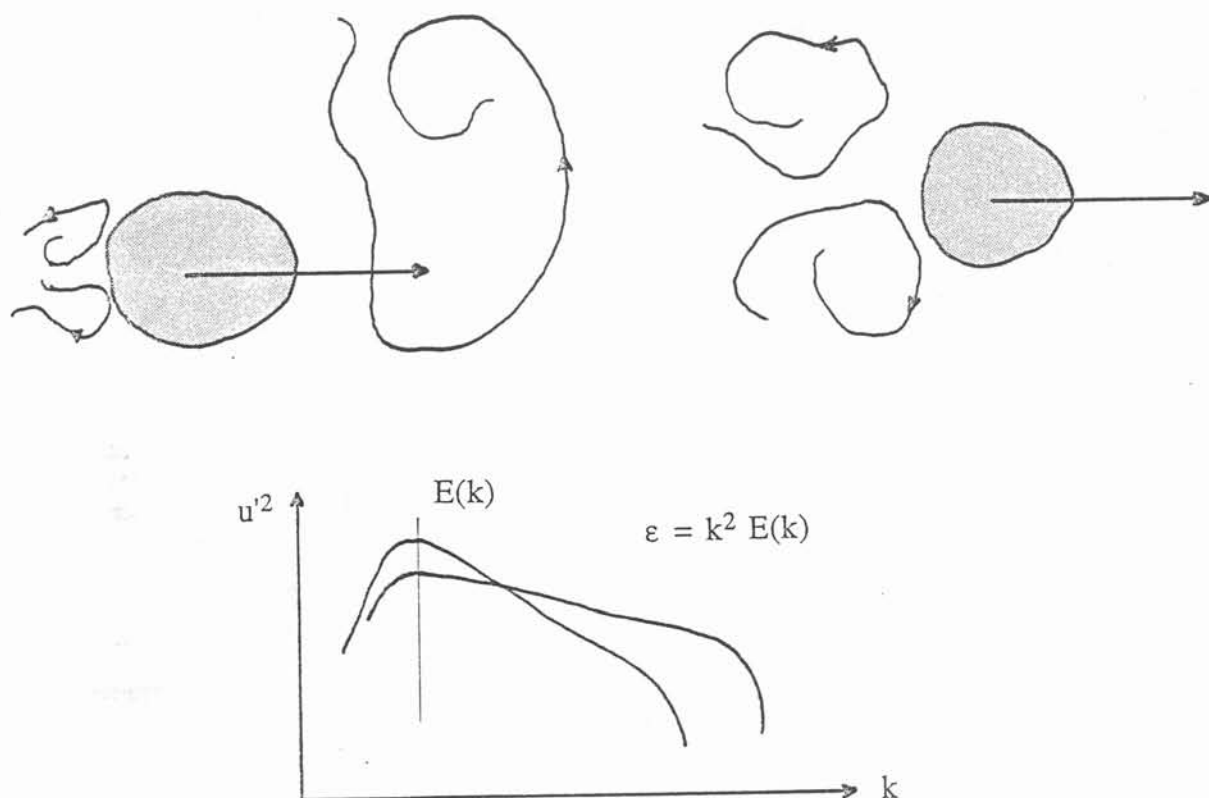
$$< u_i^{l'} v_i^{r'} > = 2 C_k k \quad (2.23)$$

ce qui nous conduit à l'expression suivante :

$$S_p^k = 2 C_k \alpha_g \rho_1 F k \quad (2.24)$$

La relation 2.23 peut s'expliquer en considérant les deux cas suivants :

si les bulles suivent exactement le mouvement du liquide, nous avons :



diminution de la taille des tourbillons énergétiques

étalement du spectre vers les petites structures

production d'énergie cinétique de la turbulence  $k$   
et de son taux de dissipation  $\varepsilon$ .



$$u^{g'} = u^{l'} \quad \text{donc} \quad v^{r'} = 0 \quad \text{donc} \quad \langle u^{l'} v^{r'} \rangle = 0$$

si les bulles ont un mouvement totalement indépendant de celui du liquide :

$$u^{g'} = 0 \quad \text{donc} \quad v^{r'} = u^{l'} \quad \text{donc} \quad \langle u^{l'} v^{r'} \rangle = 2k$$

#### 2.4.4.2.2) taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence

Le terme  $S_p^\varepsilon$ , dans l'équation de transport du taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence 2.19 est donné par :

$$S_p^\varepsilon = 2C_\varepsilon \alpha_g \rho_l F \varepsilon \quad (2.25)$$

Ce terme est également un terme de production du taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence si nous nous référons aux mesures effectuées par Lance /1.22/. Les bulles, dans leur mouvement d'ascension, ont tendance à fractionner les tourbillons énergétiques, donc à augmenter les petites structures.

#### 2.4.4.2.3) le modèle retenu

Ce modèle de turbulence fait donc intervenir deux constantes ajustables. Sa formulation assez simple comporte deux termes sources supplémentaires pour l'énergie cinétique de la turbulence et son taux de dissipation :

$$\begin{aligned} S_p^k &= 2C_k \alpha_g \rho_l F k \\ S_p^\varepsilon &= 2C_\varepsilon \alpha_g \rho_l F \varepsilon \\ 0 < C_k, C_\varepsilon < 1 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Nous avons retenu les valeurs suivantes :

$$C_k = C_\varepsilon = 0.3$$

et nous discuterons la sensibilité de ces constantes au chapitre V. Les mesures effectuées, nous le verrons, confirment les hypothèses de travail énoncées dans ce paragraphe concernant la turbulence.

### 2.4.5) **Transfert de masse métal-gaz**

Dans la version actuelle de notre modèle nous supposons l'absence de transfert de masse à l'interface des deux fluides ( $\Gamma = 0$ ).

### 2.5) **Discussion des ordres de grandeur**

Nous allons procéder à une étude d'ordre de grandeur des différents termes des

équations régissant les mouvements des deux phases. Définissons pour cela les grandeurs réduites suivantes :

$$u_k^* = \frac{u_k}{v_{k0}} \quad \rho_k^* = \frac{\rho_k}{\rho_{k0}} \quad \alpha_k^* = \frac{\alpha_k}{\alpha_{k0}} \quad \mu_k^* = \frac{\mu_k}{\mu_{k0}} \quad p_k^* = \frac{p_k}{\Delta p_0} \quad \nabla^* = \nabla L_0$$

où  $v_{k0}$ ,  $\rho_{k0}$ ,  $\alpha_{k0}$ ,  $\mu_{k0}$ ,  $\Delta p_0$ ,  $L_0$  représentent les échelles caractéristiques de vitesse, masse volumique, taux de présence, viscosité dynamique, gradient de pression et longueur. Sous forme adimensionnelle, les équations de transport de quantité de mouvement des deux phases s'écrivent de la façon suivante (voir Ishii /1.19/) :

$$\begin{aligned} \alpha_k^* \rho_k^* u_k^* \cdot \nabla^* u_k^* &= Eu^k \alpha_k^* \nabla^* p_k^* + \frac{1}{Re^k} \nabla^* \cdot (\alpha_k^* \{ \tau_k^* + \sigma_k^* \}) \\ &+ \frac{1}{Fr^k} \alpha_k^* \rho_k^* \frac{g}{|g|} + Tr^k M_k^* \end{aligned} \quad (2.27)$$

avec les nombres sans dimension d'Euler (Eu), de Reynolds (Re), de Froude (Fr) et de Trainée (Tr) , définis par :

$$\begin{aligned} Eu^k &= \frac{\Delta p_0}{\rho_{k0} v_{k0}^2} \quad , \quad Re^k = \frac{\rho_{k0} v_{k0} L_0}{\mu_{k0}} \quad , \quad Fr^k = \frac{v_{k0}^2}{|g| L_0} \\ Tr^k &= \frac{\alpha_{g0} \rho_{10}}{\alpha_{k0} \rho_{k0}} \frac{L_0}{r} \frac{(v_{10} - v_{g0})^2}{v_{k0}^2} \end{aligned}$$

Nous avons regroupé dans le tableau ci-dessous les valeurs des échelles caractéristiques :

|       | $\Delta p_0$    | $\rho$         | $v$ | $L_0$ | $\mu$     | $\alpha$      | $r$       |
|-------|-----------------|----------------|-----|-------|-----------|---------------|-----------|
| eau   |                 | $10^3$         |     |       | 10        |               | $10^{-2}$ |
| métal | $10^4$ à $10^5$ | $7 \cdot 10^3$ | 1   | 1     | 70        | $10^{-3}$ à 1 | $10^{-1}$ |
| gaz   |                 | 1              |     |       | $10^{-2}$ |               |           |

Alors, les nombres sans dimension prennent les valeurs suivantes :

|       | Eu     | $Re^{-1}$ | $Fr^{-1}$ | Tr     |
|-------|--------|-----------|-----------|--------|
| eau   | $10^2$ | $10^2$    | $10^{-1}$ | $10^2$ |
| métal | 15     | $10^2$    | $10^{-1}$ | 70     |
| gaz   | $10^5$ | $10^2$    | $10^{-1}$ | $10^5$ |

Cette analyse d'ordre de grandeur nous éclaire alors sur la nature de l'écoulement et sur les mécanismes de transfert de quantité de mouvement entre les deux phases. L'équilibre s'établit au premier ordre comme suit :

liquide : inertie = pression + force de couplage + frott

gaz : pression = force de couplage

Cet équilibre permet d'expliquer le brassage :

la force d'Archimède met le gaz en mouvement,  
le mouvement du gaz donne naissance à la force de couplage,  
cette dernière est la force motrice du liquide,  
elle s'équilibre ensuite avec les forces d'inertie, de pression et de diffusion.

## 2.6) Système final

Finalement, le système d'équations retenu s'écrit :

- équation de conservation de la masse pour le liquide :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_l \rho_l u_i^l) = 0 \quad (2.28)$$

- bilan de quantité de mouvement du liquide :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_l \rho_l u_i^l u_j^l) = -\alpha_l \frac{\partial p}{\partial x_j} + \alpha_l \rho_l g_j + M_i^l - \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_l (\sigma_{ij}^l + \tau_{ij}^l)) \quad (2.29)$$

- équation de conservation de la masse pour le gaz :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_g \rho_g u_i^g) = 0 \quad (2.30)$$

- bilan de quantité de mouvement du gaz :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_g \rho_g u_i^g u_j^g) = -\alpha_g \frac{\partial p}{\partial x_j} + \alpha_g \rho_g g_j + M_i^g - \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_g (\sigma_{ij}^g + \tau_{ij}^g)) \quad (2.31)$$

- équation de conservation totale :

$$\alpha_l + \alpha_g = 1 \quad (2.32)$$

Les valeurs des constantes empiriques du modèle sont les suivantes :

| $C_\mu$ | $\sigma_k$ | $\sigma_\varepsilon$ | $\sigma_\alpha$ | $\sigma_p$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_k$ | $C_\varepsilon$ |
|---------|------------|----------------------|-----------------|------------|-------|-------|-------|-----------------|
| 0.09    | 1.0        | 1.22                 | 0.4             | 1.0        | 1.44  | 1.92  | 0.3   | 0.3             |

Signalons enfin que le diamètre  $d$  des bulles est également un paramètre apparemment important du modèle d'après l'équation 2.10. Les valeurs néanmoins utilisées pour les calculs sont les valeurs moyennes obtenues lors des mesures. Mais nous montrerons au chapitre V que ce paramètre ne joue pas un rôle déterminant dans la prédiction des vitesses du liquide.

Pour s'en convaincre, remarquons que l'équation de transport de la quantité de mouvement du mélange liquide-gaz, qui n'est rien d'autre que la somme des équations 2.29 et 2.31, ne fait pas intervenir ce paramètre.

Le programme peut en outre résoudre une équation de transport d'un scalaire passif  $\phi$ , tel que la température ou la concentration d'un contaminant :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \rho_1 \phi) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_1 \rho_1 u_i^1 \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha_1 \frac{\mu_e^t}{\sigma_\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + S_\phi \quad (2.33)$$

avec :

$$\sigma_\phi = \text{Pr}_\phi$$

$\text{Pr}_\phi$  nombre de Prandtl ou de Schmidt associé à  $\phi$ ,

$S_\phi$  terme source.



## CHAPITRE III

### Transferts de masse et de quantité de mouvement métal-laitier

#### 3.1) Introduction

#### 3.2) Le modèle hydrodynamique utilisé pour le laitier

##### 3.2.1) Répartition de vitesse dans le laitier

##### 3.2.2) Hauteur de la couche de laitier

##### 3.2.3) Frottement interfacial côté laitier

#### 3.3) Le modèle de transfert de masse dans le laitier

#### 3.4) Le modèle de transfert de masse métal-laitier



## CHAPITRE III

### Transferts de masse et de quantité de mouvement métal-laitier

#### 3.1) Introduction

Cette partie traite des transferts de quantité de mouvement et de masse entre le métal liquide et le laitier.

Dans un premier temps, nous avons étudié les mouvements induits dans le laitier ainsi que les modifications induites sur les mouvements du métal liquide (c'est à dire le frottement interfacial). En raison des propriétés physiques particulières du laitier (forte viscosité), les caractéristiques du mouvement du métal à l'interface (vitesse, turbulence), qui interviennent directement dans le transfert de masse métal-laitier, sont naturellement différentes en présence ou en l'absence d'un laitier en surface. Nous allons développer une théorie de lubrification pour décrire l'hydrodynamique du laitier. La couche de laitier étant de faible épaisseur par rapport au rayon de la cuve ( $h/R \ll 1$ ), nous ferons l'hypothèse que les lignes de courant restent parallèles.

En second lieu, nous aborderons les transferts de masse métal-laitier. Nous verrons que l'étape lente ou limitante se situe au niveau de l'interface côté métal, alors que les transferts au sein du laitier seront considérés comme instantanés. L'influence du débit de gaz injectés sur la cinétique de ces réactions sera présentée au chapitre VI, en soulignant l'importance des déformations de l'interface.

Le problème général du transfert métal-laitier ne peut être traité. Il nous faut effectuer des hypothèses simplificatrices. L'énoncé de ces hypothèses a été facilité par les observations réalisées sur la maquette à eau. Nous les présenterons au paragraphe suivant. Elles concernent la géométrie des interfaces, les conditions aux limites à ces interfaces, les mouvements et transferts dans le laitier.

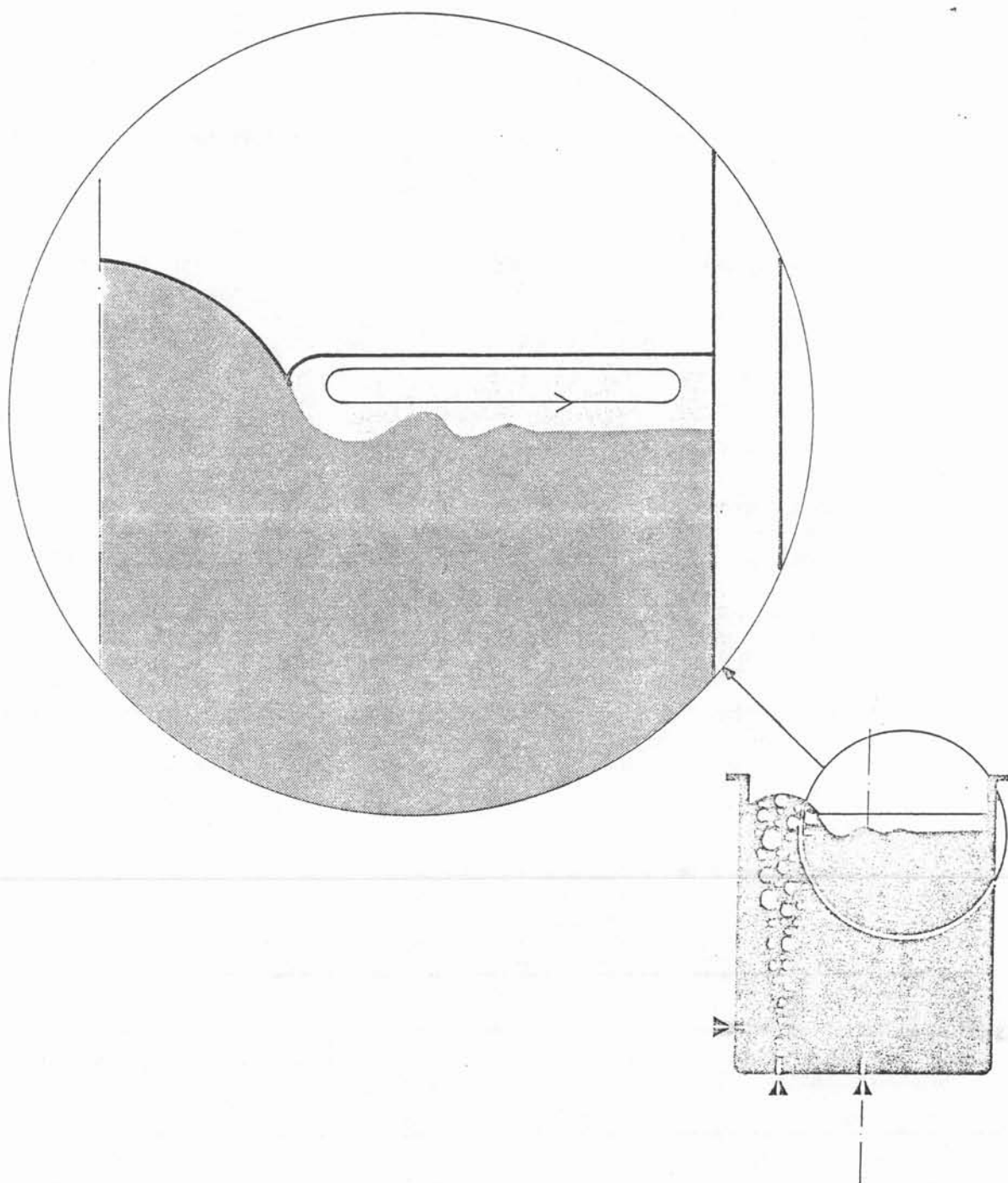
#### 3.2) Le modèle hydrodynamique utilisé pour le laitier

Nous avons vu précédemment que le brassage pneumatique du métal liquide est décrit à l'aide d'un modèle à deux phases. Les observations réalisées sur la maquette à eau montrent que le laitier, dans certaines conditions expérimentales très fréquentes d'ailleurs (rapport de volume métal-laitier et débit gaz), est repoussé suffisamment près de la paroi pour que le dôme soit découvert (figure 3.1). Dans ces conditions, le gaz n'interagit pas directement avec le laitier. Une des hypothèses importantes est de considérer que le laitier est ensuite repoussé essentiellement par frottement au contact du métal et par gravité (grâce à l'existence du dôme central). Cette hypothèse sera vérifiée ultérieurement par des mesures. Le laitier étant très visqueux n'occupant qu'une faible épaisseur, nous allons développer une théorie de lubrification afin de prédire son influence sur le mouvement du métal à l'interface [1.10]. Les hypothèses faites sont les suivantes :

- laitier très visqueux,
- faible épaisseur,
- lignes de courant parallèles,
- frottement nul à la surface libre du laitier,
- répartition hydrostatique de la pression dans le laitier,
- continuité du frottement et de la vitesse à l'interface métal -laitier,
- effets de tension superficielle négligeables.



Figure 3.1 : Configuration de l'interface métal-laitier.



### 3.2.1) Répartition des vitesses dans le laitier

Séparons le laitier en deux parties, l'une à courbure faible et l'autre à courbure forte (zone I). L'équation du mouvement du laitier en dehors de la zone I s'écrit dans le système de coordonnées (n,t) (voir figure 3.2, /1.10/) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial n} &= -\rho g_n \\ \frac{\partial p}{\partial s} &= -\rho g_s + \mu \frac{\partial^2 u_s}{\partial n^2}\end{aligned}\quad (3.1)$$

L'intégration de la première égalité entre l'interface et la surface libre nous conduit à la relation :

$$p = p_0(s) + \rho g_n n = p_a - \rho g_n (n - h) \quad (3.3)$$

en négligeant les effets de tension interfaciale.

La seconde égalité devient alors :

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\rho g_s + \mu \frac{\partial^2 u_s}{\partial n^2} = -\frac{\partial}{\partial s}(\rho g_n (n - h)) \quad (3.4)$$

soit encore

$$\mu \frac{\partial^2 u_s}{\partial n^2} = \rho g \left( \underset{(1)}{\sin \theta} + \underset{(2)}{\sin \theta \theta'} (n - h) + \underset{(3)}{h' \cos \theta} \right) \quad (3.5)$$

Le deuxième terme du membre de droite de l'égalité 3.5 est négligeable car :

$$\frac{(2)}{(1)} \approx \theta' h \approx \theta \frac{h}{R} \ll 1$$

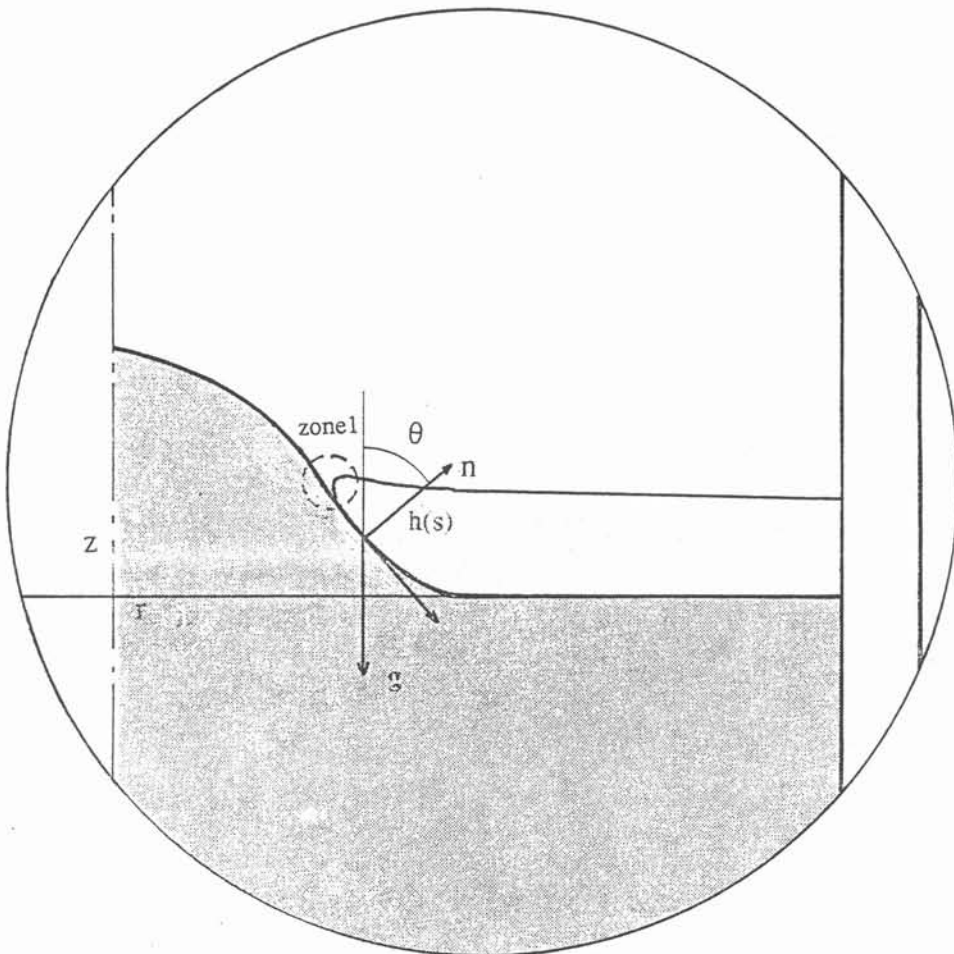
Finalement, l'équation à résoudre s'écrit :

$$\mu \frac{\partial^2 u_s}{\partial n^2} = \rho g (\sin \theta + h' \cos \theta) \quad (3.6)$$

Le premier terme du membre de droite est la force de rappel résultant de la courbure du dôme, le second terme représente le poids. Nous pouvons remarquer que ces deux forces agissent dans le même sens : elles tendent à repousser le laitier vers la paroi.

Dans un premier temps, nous cherchons une solution à variables séparées :

Figure 3.2 : Conditions aux limites.



$$u_s(s, n) = U_s(s) f(m)$$

$$\text{en posant } m = \frac{n}{h(s)} \quad (3.7)$$

L'équation (3.6) conduit à l'équation différentielle en  $h$  suivante :

$$f''(m) = \frac{\rho g h^2(s)}{\mu U_s(s)} (\sin \theta(s) + h' \cos \theta(s)) = C^{te} \quad (3.8)$$

L'intégration de la fonction de répartition  $f$  suivant  $n$  est effectuée en considérant les conditions aux limites suivantes :

- la vitesse du laitier à l'interface est égale à celle du liquide (pas de glissement) :

$$u_s(n=0) = U_s$$

- pas de frottement à la surface libre du laitier :

$$\frac{\partial u_s}{\partial n}(n=h) = 0$$

- le débit à travers une verticale ( $n$ ) est nul :

$$\int_0^{h(s)} u_s(s, n) dn = 0$$

La fonction de répartition a alors l'expression suivante :

$$f(m) = \frac{3}{2} m^2 - 3m + 1 \quad (3.9)$$

La deuxième composante de la vitesse se déduit de l'équation de continuité :

$$u_n(s, n) = \int_0^n -\frac{1}{s} \frac{\partial(s u_s)}{\partial s} dn$$

c'est à dire :

$$u_n(s, n) = -h(s) \left( \frac{U_s(s)}{s} + U_s'(s) \right) \left( \frac{1}{2} m^3 - \frac{3}{2} m^2 + m \right) + U_s(s) h'(s) \left( m^3 - \frac{3}{2} m^2 \right) \quad (3.10)$$

### 3.2.2) Hauteur de la couche de laitier

L'équation régissant les variations de la hauteur  $h$  de laitier est tirée de l'égalité (3.8) :

$$h' \cos \theta + \sin \theta = \frac{3 \mu U_s}{\rho g h^2} \quad (3.11)$$

La valeur de la hauteur de laitier à la paroi est déterminée à l'aide de l'équation de conservation de la masse du laitier :

$$M = 2 \pi \rho \int_{s_{\text{crit}}}^R s h(s) ds \quad (3.12)$$

Le rayon critique  $s_{\text{crit}}$  est défini comme étant la valeur du rayon pour lequel la hauteur de laitier est nulle.

### 3.2.3) Frottement interfacial côté laitier

D'après (3.7) et (3.9), le frottement interfacial côté laitier s'écrit :

$$\tau(s, 0) = \mu \frac{\partial u_s}{\partial n} (n=0) = -3 \mu \frac{U_s}{h} \quad (3.13)$$

Cette formule reste valable tant que les forces de tension interfaciale sont négligeables, c'est à dire que la hauteur de laitier ne tend pas vers zéro. Cette condition se traduit par :

$$\begin{aligned} \gamma \kappa &\ll \rho_{\text{lait}} g h \\ \text{avec } \kappa &= h'' \text{ et } h'' = \frac{h}{2} = s \text{ rayon de courbure de l'interface} \\ h^2 &\gg \frac{2 \gamma}{\rho_{\text{lait}} g} \end{aligned} \quad (3.14)$$

### 3.3) Le modèle de transfert de masse dans le laitier

Cette partie consiste en l'étude des transferts de masse dans le laitier présent en surface.

L'évolution du champ de concentration d'une espèce donnée est régi, dans le laitier, par l'équation générale suivante :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_s \frac{\partial c}{\partial s} + u_n \frac{\partial c}{\partial n} = D \left( \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial c}{\partial s} + \frac{\partial^2 c}{\partial n^2} \right) \quad (3.15)$$

(6)      (1)      (2)      (3)      (4)      (5)

En introduisant les échelles caractéristiques, cette équation s'écrit symboliquement :

$$\frac{c_0}{\Delta t} + \frac{U c_0}{R} + \frac{U h c_0}{R h} = \frac{D c_0}{R^2} + \frac{D c_0}{R h} + \frac{D c_0}{h^2}$$

Apparaissent ainsi des nombres sans dimension :

$$R_{1/5} = \frac{U R}{D} (h/R)^2 \quad R_{5/3} = (R/h)^2 \quad R_{4/5} = h/R$$

Dans le cas de la désulfuration de l'acier dans une poche industrielle, les échelles valent :

$$U = 1 \text{ m/s}, R = 1.5 \text{ m}, h = 0.075 \text{ m}, D = 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s},$$

et les nombres caractéristiques :

$$R_{1/5} = 3.75 \cdot 10^6, R_{5/3} = 400, R_{4/5} = 0.05.$$

L'hypothèse classique de couche limite est ainsi justifiée, et (3.15) devient :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_s \frac{\partial c}{\partial s} + u_n \frac{\partial c}{\partial n} = D \frac{\partial^2 c}{\partial n^2} \quad (3.16)$$

Intégrons l'équation (3.16) suivant l'axe n de 0 à h(s) :

$$\int_0^{h(s)} \left( \frac{\partial c}{\partial t} + u_s \frac{\partial c}{\partial s} + u_n \frac{\partial c}{\partial n} \right) dn = \int_0^{h(s)} D \frac{\partial^2 c}{\partial n^2} dn = [\phi]_0^{h(s)} \quad (3.17)$$

où le flux s'écrit :

$$\phi = D \frac{\partial c}{\partial n}$$

De manière analogue à la méthode intégrale de la couche limite, nous nous donnons une distribution verticale (suivant n) du flux. La plus simple est une dépendance linéaire du flux  $\phi$  avec la coordonnée n :

$$\phi(s, n) = \phi_i (m - 1) \quad \phi_i = \phi(s, 0) \quad (3.18)$$

Le profil de concentration est alors parabolique :

$$c = c_i - \frac{\phi_i h}{D} \left( \frac{m^2}{2} - m \right)$$

Or à l'interface, nous disposons des relations d'équilibre suivantes :

$$c_i = c_{il} = q c_{im}$$

$$\phi_i = h_m (c_{im} - c_\infty)$$

où  $q$  coefficient de partage (en général très grand  $\approx 100-300$ ),  
 $h_m$  coefficient de transfert à l'interface,  
 $c_\infty$  concentration au loin dans le métal,  
 $c_{im}$  concentration à l'interface côté métal,  
 $c_{il}$  concentration à l'interface côté laitier.

ainsi la concentration dans le laitier peut s'écrire :

$$c = c_\infty q - \phi_i \left( \frac{h}{D} \left( \frac{m^2}{2} - m \right) - \frac{q}{h_m} \right) \quad (3.19)$$

Il nous est alors possible de calculer chacun des termes de l'équation (3.17) à résoudre à partir des relations (3.7), (3.9), (3.10), (3.18), (3.19) :

- le terme temporel :

$$\int_0^h \frac{\partial c}{\partial t} dn = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h c dn = \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \left( \frac{h^2}{3D} + \frac{h q}{h_m} \right) + q h \frac{\partial c}{\partial t}$$

- le terme spatial :

$$\begin{aligned} \int_0^h \left( u_s \frac{\partial c}{\partial s} + u_n \frac{\partial c}{\partial n} \right) dn &= \int_0^h \left( \frac{\partial u_s c}{\partial s} + \frac{\partial u_n c}{\partial n} + c \frac{u_s}{s} \right) dn \\ &= \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} s \int_0^h u_s c dn + (u_n c)_0^h \\ \int_0^h \left( u_s \frac{\partial c}{\partial s} + u_n \frac{\partial c}{\partial n} \right) dn &= - \frac{\phi_i}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{s U_s h^2}{10 D} \right) - \frac{U_s h^2}{10 D} \frac{\partial \phi_i}{\partial s} \\ &\quad - \frac{U_s h'}{2} \left( c_\infty q + \phi_i \left( \frac{h}{2D} + \frac{q}{h_m} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\int_0^h \left( u_s \frac{\partial c}{\partial s} + u_n \frac{\partial c}{\partial n} \right) dn = - \frac{\phi_i}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{s U_s h^2}{10D} \right) - \frac{U_s h^2}{10D} \frac{\partial \phi_i}{\partial s} - \frac{U_s h'}{2} \left( c_\infty q + \phi_i \left( \frac{h}{2D} + \frac{q}{h_m} \right) \right)$$

Finalement, nous aboutissons à l'équation différentielle suivante :

$$A \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + B \frac{\partial \phi_i}{\partial s} + C \phi_i = E \quad (3.20)$$

où les coefficients de cette équation sont donnés par :

$$\begin{aligned} A &= \frac{h^2}{3D} + \frac{h q}{h_m} & B &= - \frac{U_s h^2}{10D} \\ C &= - \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{s U_s h^2}{10D} \right) + 1 - \frac{U_s h'}{2} \left( \frac{h}{2D} + \frac{q}{h_m} \right) \\ E &= 0.5 U_s h' q c_\infty + q h \frac{\partial c_\infty}{\partial t} \end{aligned}$$

Les conditions aux limites associées à l'équation (3.20) sont :

$$\begin{aligned} - \text{au rayon critique, flux nul} & \quad \phi_i = 0 \quad s = s_{\text{crit}} \\ - \text{à la paroi, dérivée nulle du flux} & \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial s} = 0 \quad s = R \end{aligned}$$

### 3.4) Le modèle de transfert de masse métal-laitier

Le transfert d'une espèce chimique du métal vers le laitier résulte de la combinaison de trois mécanismes :

i) dans le métal, le transfert d'un contaminant vers l'interface, qui est régi par les lois de transport.

ii) le transfert chimique du contaminant à l'interface proprement dite entre le côté métal et le côté laitier. Cette barrière chimique sera négligée dans la mesure où les réactions chimiques sont quasi-instantanées.

iii) le transfert de masse dans le laitier, comme nous venons de le voir §3.3, qui est fonction du transfert de quantité de mouvement métal-laitier. Intervient également le coefficient de partage à l'interface  $q$ , très grand en général.



En conséquence, le transfert n'est limité que du côté métal. Le flux d'une espèce S à l'interface métal-laitier s'écrit :

$$\dot{n} = k \left( \underline{S} - \frac{(S)}{q} \right) \quad \text{avec } k^{-1} = h_m^{-1} + (q k_l)^{-1} + k_c^{-1} \approx h_m^{-1} \quad (3.21)$$

Le système différentiel 3.22 décrit l'évolution de la concentration dans le métal :

$$\frac{D(\alpha \rho c)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha D \frac{\partial c}{\partial x_i} \right) \quad \text{avec } c = \underline{S} \quad (3.22)$$

auquel nous devons associer les conditions aux limites suivantes :

- i) à la surface libre et aux parois, le flux est nul :  $c_{,n} = 0$
- ii) à l'interface métal-laitier, le flux est donné par la relation 3.21.
- iii) les conditions initiales spatiales et temporelles consistent en une répartition uniforme du contaminant dans le métal.

Dans le chapitre VI, nous étudierons un exemple de transfert de masse (en l'occurrence la désulfuration de l'acier) dans une poche de traitement brassée par injection de gaz inerte.

## CHAPITRE IV

### Modèle numérique : le code GALILAI

- 4.1) Les mouvements dans le mélange métal-gaz
  - 4.1.1) Les équations de transport en coordonnées cartésiennes
  - 4.1.2) Les équations de transport en coordonnées curvilignes orthogonales
    - 4.1.2.1) Principe des maillages curvilignes orthogonaux
    - 4.1.2.2) Les équations en coordonnées curvilignes orthogonales
  - 4.1.3) Schéma de discrétisation : dilemme précision-stabilité
    - 4.1.3.1) la diffusion numérique
    - 4.1.3.2) méthode des pas fractionnaires
    - 4.1.3.3) dilemme précision-stabilité
  - 4.1.4) Discrétisation
    - 4.1.4.1) le maillage
    - 4.1.4.2) discrétisation des équations de transport
    - 4.1.4.3) traitement de la pression
    - 4.1.4.4) cas particulier du taux de présence
  - 4.1.5) Conditions aux limites
  - 4.1.6) Méthode de résolution
  - 4.1.7) Structure du code de calcul
- 4.2) Le couplage hydrodynamique métal-laitier
- 4.3) Transfert de masse métal-laitier
- 4.4) Aspects numériques
  - 4.4.1) Problèmes de mise en oeuvre du code de calcul
  - 4.4.2) Support informatique



## CHAPITRE IV

### Modèle numérique : le code GALILAI

Ce chapitre est consacré à la description du code de calcul développé à partir des modèles d'écoulement à double phase métal-gaz et de transfert métal-laitier que nous avons présenté au cours des chapitres II et III.

#### 4.1) Les mouvements dans le mélange métal-gaz

Intéressons nous à la première partie du code GALILAI, celle qui aborde l'aspect hydrodynamique du problème : le brassage pneumatique.

##### 4.1.1) Les équations de transport en coordonnées cartésiennes

Le programme utilise les variables primitives (vitesse-pressure) et résout le système constitué par les équations de continuité, les équations de bilan de quantité de mouvement pour les deux fluides et les équations de transport de l'énergie cinétique de la turbulence  $k$  et de son taux de dissipation  $\epsilon$ . Dans un système de coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$ , les équations de transport (2.18), (2.19), (2.28) à (2.31), (2.33), peuvent se mettre sous la forme canonique suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k \phi) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_k \rho_k u_i^k \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha_k \frac{\mu_k^t}{\sigma_\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + S_\phi \quad (4.1)$$

(1)
(2)
(3)
(4)

(pas de sommation sur  $k$ )

avec les termes

- (1) : de variation temporelle,
- (2) : de convection,
- (3) : de diffusion,
- (4) : sources,
- $\sigma_\phi$  : nombre de Prandtl ou de Schmidt associé à  $\phi$ .

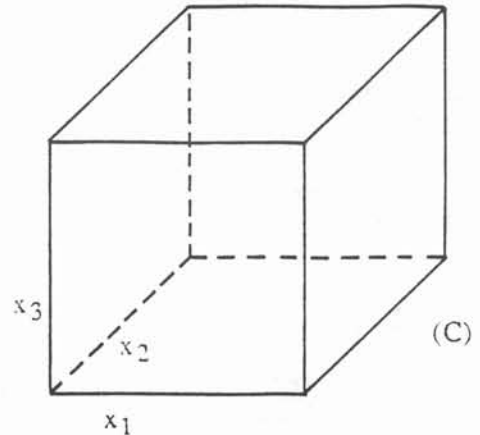
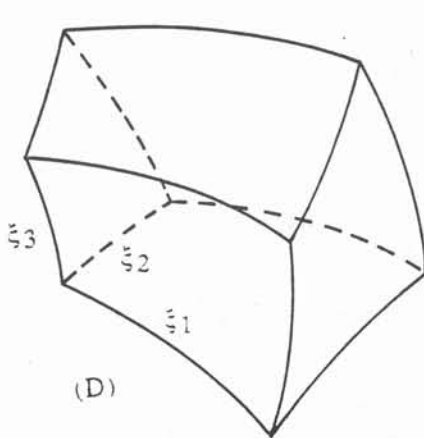
Rappelons enfin que le détail de ces équations est fourni au chapitre II.

##### 4.1.2) Les équations de transport en coordonnées curvilignes orthogonales

L'utilisation de maillages curvilignes orthogonaux ou adaptatifs, c'est à dire suivants la courbure des frontières est motivée par l'existence d'une géométrie complexe due par exemple à la déformation de la surface libre, à l'introduction de baffles ou à l'inclinaison des parois latérales. L'expression des conditions aux limites est dans ce cas plus simple et plus juste (voir §4.1.5).

#### 4.1.2.1) principe des maillages curvilignes orthogonaux

Une transformation curviligne orthogonale est une fonction de transfert entre un domaine physique (D) quelconque avec son maillage  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  et un cube (C) dans lequel le maillage  $(x_1, x_2, x_3)$  est rectangulaire et régulier. Cette transformation est entièrement déterminée par la donnée des fonctions  $x_i(\xi_j)$ .



Des termes liés à la géométrie du domaine tels que les facteurs d'échelles  $h_i$  suivant l'axe  $x_i$  et les courbures suivant la ligne de coordonnées  $x_j$  sont introduits :

$$h_i^2 = \left( \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} \right)^2 \quad \text{pas de sommation sur } i$$

$$H_i(j) = \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial h_i}{\partial \xi_j} \quad \text{pas de sommation sur } i, j$$

Le jacobien de la transformation orthogonale  $|h|$  intervient également dans l'écriture des équations de transport dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales et est égal au produit des facteurs d'échelles dans les trois directions :

$$|h| = h_1 h_2 h_3$$

L'obtention de maillages curvilignes orthogonaux n'est pas développée dans ce rapport. Pour certains domaines, il existe parfois des solutions analytiques, comme pour un cylindre. Pour des domaines complexes, les méthodes de calcul de maillages curvilignes orthogonaux proposées /4.1 à 4.7/ peuvent être utilisées.

Nous avons développé un programme : **CAMACO**, de calculs de maillages adaptés aux courbures des frontières à partir de ces méthodes, en collaboration avec Galpin /4.22/. Il existe deux versions de ce programme, l'une pour le calcul de maillages bidimensionnels ou tridimensionnels axisymétriques, l'autre pour le calcul de maillages tridimensionnels.

#### 4.1.2.2) les équations en coordonnées curvilignes orthogonales

L'analyse tensorielle développée par certains auteurs /4.8,4.9/ permet d'obtenir les équations de transport dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  quelconques :

$$\frac{\partial}{\partial t} (|h| \alpha_k \rho_k \phi) + \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \frac{|h|}{h_i} \{ \alpha_k \rho_k u_i^k \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{h_i \partial \xi_i} \} \right) = |h| S_\phi \quad (4.2)$$

(1)
(2)
(3)
(4)

où nous reconnaissons à nouveau les termes :

- (1) : de variation temporelle,
- (2) : de convection,
- (3) : de diffusion,
- (4) : source.

Le détail de ces équations et les valeurs de  $\phi$ ,  $\Gamma_\phi$  et  $S_\phi$  sont fournies en annexe II.

Leur validité est limitée à des domaines, donc des maillages, non évolutifs. En cas de dépendance du maillage avec le temps, le terme de convection doit être corrigé par l'introduction d'une vitesse de convection de maille /4.22/.

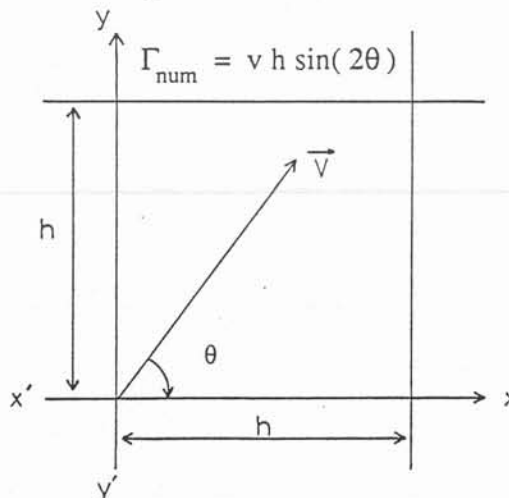
#### 4.1.3) Schéma de discrétisation : dilemme précision-stabilité

La discrétisation d'un opérateur mathématique différentiel introduit, nous le savons, une imprécision (troncature). Il est primordial de connaître l'ordre de grandeur de l'approximation afin de chiffrer la précision des résultats des calculs. L'analyse de la bibliographie présentée ci-après nous a permis de choisir un schéma de discrétisation adapté à notre cas.

##### 4.1.3.1) la diffusion numérique

Quelle que soit la discrétisation d'un opérateur employée, nous effectuons une troncature, nécessaire pour des raisons de temps de calcul et de stockage. Quand il s'agit de l'opérateur convectif, l'erreur ainsi commise est appelée fausse diffusion ou diffusion numérique. Pour un schéma de discrétisation spatiale d'ordre un, le coefficient de fausse diffusion suivant la direction  $x$  est proportionnel, à une dimension /4.10/, à deux dimensions /4.9,4.11/ :

- au module de la vitesse  $v$ ,
- à la dimension de la maille  $h$ ,
- au sinus de deux fois l'angle  $\theta$  du vecteur vitesse avec l'axe  $x$ ,



A trois dimensions, les maillages utilisés sont plus grossiers pour des raisons de limitation de stockage des valeurs. L'erreur de troncature est donc plus importante. De plus il existe trois angles possibles, ce qui complique le problème. Les écoulements étudiés étant de plus en plus complexes, il devient délicat de faire la part entre diffusion turbulente et diffusion numérique. Des schémas d'ordre supérieur sont apparus, comme "Quick" /4.12/, augmentant la précision des discrétisations, mais créant parfois des discontinuités non physiques /4.13/ dans les régions où existent de forts gradients.

Un autre aspect important des simulations numériques est le temps de calcul. Pour des ingénieurs, il est nécessaire de les minimiser au maximum.

#### 4.1.3.2) méthode des pas fractionnaires

Avec cette méthode, nous traitons les différents opérateurs intervenant dans les équations de transport indépendamment, et avec la méthode la plus adaptée à leur nature mathématique :

- hyperbolique,
- parabolique,
- elliptique.

Cette méthode permet une réduction importante du temps de calcul /4.14/. Elle fait intervenir une dérivée temporelle, réelle ou fictive selon que le phénomène est fonction du temps ou stationnaire. Chaque pas de temps est décomposé en trois étapes pendant lesquelles nous pouvons traiter par exemple la contribution de la convection (hyperbolique) par la méthode des caractéristiques, de la diffusion (parabolique) par une méthode implicite et des termes sources. Cette méthode d'ordre un en temps présente l'avantage d'être inconditionnellement stable. D'un autre côté, la mise en oeuvre des conditions aux limites s'avère parfois délicate /4.14/.

#### 4.1.3.3) dilemme précision-stabilité

Les schémas d'ordre deux ou trois ne sont pas toujours inconditionnellement stables et sont assez lourds à mettre en oeuvre /4.13/. Certains auteurs /4.15/ ont proposé des schémas hybrides inconditionnellement stables, plus complexes que le simple schéma hybride centré-décentré, mais sans véritable succès.

Il est intéressant de noter l'approche de Sawada /4.23/, qui propose avec son programme NSMAC un schéma du troisième ordre. Les variables primitives (vitesse, pression) sont calculées sur un maillage régulier et non pas à grilles décalées. La pression est directement calculée à partir d'une équation de Poisson. NSMAC est précis, rapide car entièrement vectorisable, mais présente encore quelques problèmes dans l'écriture des conditions aux limites.

Voilà pourquoi nous avons construit dans un premier temps un algorithme issu de l'algorithme monophasique "Simple" /2.5/. Nous le décrivons au paragraphe suivant. Il procède par prédiction-correction sur la pression, en utilisant un schéma hybride classique.

### 4.1.4) **Discrétisation**

La discrétisation des équations est réalisée par la méthode des volumes finis, appelée encore discrétisation conservative. Elle permet en effet la vérification des lois de conservation sur des domaines plus ou moins grands, ainsi que l'interprétation physique des différents termes. Cette méthode utilise un schéma implicite aux différences finies inconditionnellement stable sur un maillage à grilles décalées.

#### 4.1.4.1) le maillage

Un réseau de quatre grilles décalées rend la discrétisation plus simple et augmente la précision de l'équation de continuité (dérivées centrées uniquement). La grille principale contient les noeuds de pression, de taux de présence, des propriétés physiques et des caractéristiques de la turbulence. Chaque grille décalée dans la direction de l'axe  $\xi_i$  se rapporte à la vitesse et à la force dans cette direction  $i$  (figure 4.1).

Pour faciliter enfin la discrétisation, un double système de numérotation est utilisé (figure 4.2). Le premier (i,j,k) permet le repérage d'un noeud correspondant à une variable physique telle que vitesse, pression, viscosité... Le second (l,m,n) est relié aux paramètres géométriques tels que coordonnées, facteurs d'échelles...

#### 4.1.4.2) discrétisation des équations de transport

La discrétisation des équations de transport en coordonnées curvilignes orthogonales ne présente pas de difficulté majeure. Elle est néanmoins fastidieuse. C'est pourquoi nous avons choisi de la détailler en annexe III. Schématiquement, chaque équation différentielle de transport (4.2) est la somme d'un terme de convection, d'un terme de diffusion et d'un terme source :

$$\underbrace{u \cdot \text{grad} \alpha \rho \phi}_{\text{convection}} + \underbrace{\text{div}(\alpha c \text{grad} \phi)}_{\text{diffusion}} + \underbrace{S_\phi}_{\text{source}} = 0$$

Chacun de ses termes est intégré dans le volume de contrôle associé à la variable  $\phi$  calculée (voir figure 4.3). Le caractère elliptique du problème explique pourquoi nous pouvons relier un point P aux six autres points les plus proches (deux dans chaque direction  $\xi_i$ , figure 4.1) :

$$N, S, E, W, F, B.$$

Sous forme discrétisée, chaque équation s'écrit alors :

$$\sum_{i=N, S, E, W, F, B} A_i \Phi_i - A_P \Phi_P + SU = 0 \quad (4.3)$$

où les coefficients  $A_i$  se calculent comme la différence d'un terme de convection  $C_i$  et d'un terme de diffusion  $D_i$ , alors que le coefficient  $SU$  représente les termes de production ou de source (pression, force de volume, ...).

Pour les termes non linéaires  $C_i$ , nous utilisons un schéma hybride. Il est normalement centré d'ordre deux /4.9/. Mais quand le nombre de Péclet de maille est supérieur à 2, ce schéma n'est pas stable /4.17-4.18/. Le modèle utilise alors un schéma décentré amont, d'ordre un, qui est inconditionnellement stable et qui traduit physiquement le fait que l'information arrive toujours d'abord de l'amont. Ainsi :

$$\begin{aligned} A_i &= 0.5 C_i - D_i & \text{si } Pe < 2 \\ A_i &= 0.5 (C_i - |C_i|) & \text{si } Pe > 2 \end{aligned}$$

où le nombre de Péclet de maille, rapport des termes de convection et de diffusion, est :





$$Pe = \frac{\rho_k u_i^k dx}{\mu_k}$$

Dans (4.3), le pivot  $A_p$  s'écrit de la façon suivante :

$$A_p = \sum_i A_i + SP$$

où sont regroupés dans le terme spécial SP :

- le défaut de masse existant à l'itération précédente,
- des termes de courbure,

de manière à augmenter la valeur du pivot. Ainsi, d'après le critère de Scarborough (dit "*de la diagonale dominante*"), nous assurons une bonne convergence par la méthode de Gauss-Seidel.

#### 4.1.4.3) traitement de la pression

La pression, supposée identique dans les deux phases, est une variable à part entière, bien qu'elle n'ait pas d'équation. Nous utilisons alors une méthode de prédiction-correction de la pression. L'équation de conservation de la masse des deux fluides [2.7,4.17] est transformée de façon à obtenir une équation de correction de pression :

a) au cours des itérations, les champs de vitesse calculés après résolution des équations de transport de quantité de mouvement :

$$\sum_{j=1}^6 A_j^u u_j^k - A_i^u u_i^k + SU_i' + A_i^p (p_{i+1} - p_i) \quad \text{pas de sommation sur } k, i$$

ne vérifient pas nécessairement les équations de continuité :

$$\sum_{j=1}^6 \frac{\partial}{\partial s_j} \left( \frac{|h|}{h_j} \alpha_k \rho_k u_j^k \right) = 0 \quad \text{pas de sommation sur } k$$

b) écrivons alors que la vitesse (resp. la pression) est la somme d'une vitesse (resp. d'une pression) vérifiant les équations précédentes et d'une perturbation :

$$u_i^k = u_i^{k*} + du_i^k$$

$$p_i = p_i^* + dp_i$$

c) nous supposons de plus que la perturbation de vitesse est fonction de la pression :

$$du_i^k = \frac{\partial u_i^k}{\partial (p_{i+1} - p_i)} (dp_{i+1} - dp_i)$$

d) la dérivée de la vitesse par rapport à la pression est calculée dans l'équation de transport de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u_i^l}{\partial (p_{i+1} - p_i)} = \frac{A_i^p}{A_i^u} = \frac{vol_i^u \alpha_i^u}{h_i A_i^u} \quad \text{pas de sommationsur } i, k$$

e) l'équation de correction de pression s'écrit alors :

$$\sum_{j=1}^6 A_j (dp_j - dp_p) + SU = 0 \quad (4.4)$$

avec

$$A_E = S_{PE} \left( \frac{\alpha_P^u vol_P^u \rho_P \alpha_P}{h_{1P}^u A_P^u} \right)_1 + S_{PE} \left( \frac{\alpha_P^u vol_P^u \rho_P \alpha_P}{h_{1P}^u A_P^u} \right)_g$$

et

$$SU = S_{PE} (\alpha_l \rho_l u_i^l + \alpha_g \rho_g u_i^g)_E - (\alpha_l \rho_l u_i^l + \alpha_g \rho_g u_i^g)_W + \dots$$

#### 4.1.4.4) cas particulier du taux de présence

Le taux de présence du gaz  $\alpha$  est calculé à partir de l'équation de continuité du gaz. Cette équation diffère des autres équations de transport par l'absence du terme de diffusion ( $D_i = 0$ ). Le schéma utilisé est donc purement décentré amont. De plus, la somme :

$$M = \sum_{i=N, S, E, W, F, B} C_i$$

ne représente pas le défaut de masse au point calculé, car ici le terme convectif n'est pas pondéré par le taux de présence :

$$C_i = \rho_g u_i^g S_i$$

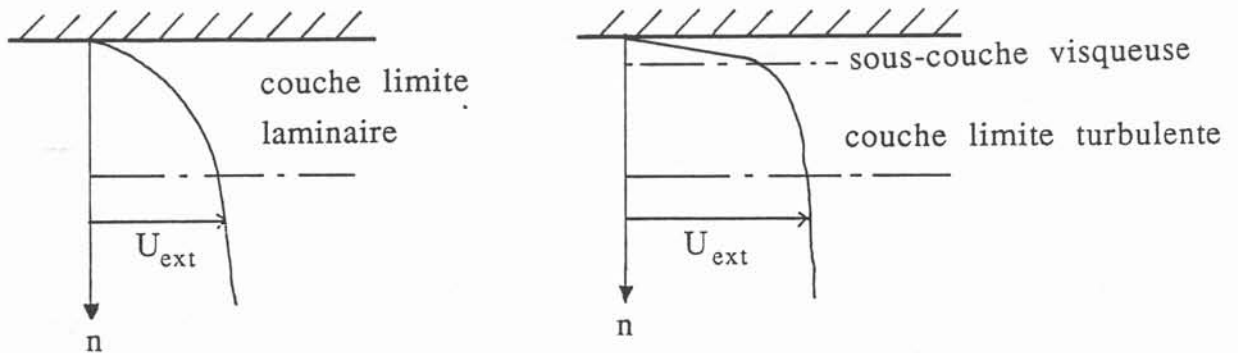
et non pas :

$$C_i = \alpha_g \rho_g u_i^g S_i$$

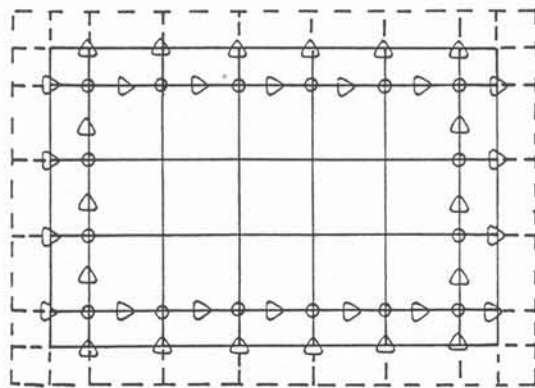
comme dans le calcul des vitesses. Cette différence est à l'origine de difficultés numériques que nous décrirons plus en avant dans ce rapport (voir §4.4).

#### 4.1.5) Conditions aux limites

Les conditions aux limites pour ce type de modèle à deux phases ne sont pas triviales. Il importe de les traiter correctement. Aux équations de Navier-Stokes, sont associées des conditions d'adhérence à une paroi ou de frottement nul à une surface libre (pour le champ de vitesse), et des conditions de flux imposées par l'extérieur (pour un scalaire passif). Les écoulements à grand nombre de Reynolds, laminaires ou turbulents, peuvent créer une difficulté supplémentaire. La vitesse ne tend vers zéro que dans une zone d'épaisseur très faible (quelques dizaines de millimètres à quelques centièmes de millimètres), proche de la paroi, que nous appelons couche limite. En régime turbulent, la couche limite contient elle-même une sous-couche appelée sous-couche visqueuse. A l'intérieur de ces zones, les gradients peuvent être très importants. Ne disposant pas d'un nombre de points suffisamment grand pour décrire ces zones, et afin d'éviter d'éventuelles difficultés numériques, un traitement spécial sera appliqué (cf Launder et Spalding).



Les conditions aux limites affectent les points frontières, pour lesquels la forme discrétisée (4.3) des équations de transport n'est pas directement utilisable.



Toutes les modifications concernant les conditions aux limites sont regroupées dans le sous-programme SOLVPRO. Pour le type de brassage étudié, les conditions aux limites peuvent être de trois sortes :

- parois,
- injecteur,
- surface libre ou axe de symétrie.

Le détail des conditions aux limites est fourni en annexe IV.

#### 4.1.6) Méthode de résolution

Les coefficients ( $A_i$ ) du système d'équations (2.3) à résoudre sont des fonctions des différentes variables physiques (à savoir vitesse, pression, viscosité...). C'est pourquoi nous utilisons un algorithme itératif pour résoudre le système non linéaire complet. Chaque équation est alors résolue partiellement par la méthode de Gauss-Seidel par blocs avec sous relaxation. L'algorithme présenté est issu de l'algorithme généralement utilisé en écoulement monophasique "Simple" /2.5/, voir /4.17/ :

1. Estimation d'un champ de pression  $p^*$
2. Résolution des équations de quantité de mouvement du gaz pour obtenir  $u_g^*$
3. Résolution des équations de quantité de mouvement du liquide pour obtenir  $u_l^*$
4. Résolution de l'équation de correction de pression  $dp$
5. Correction de la pression  $p = p^* + dp$
6. Correction du champ de vitesse liquide  $u_l = u_l^* + (du_l / dp) dp$
7. Correction du champ de vitesse gaz  $u_g = u_g^* + (du_g / dp) dp$
8. Résolution de l'équation de taux de présence du gaz  $\alpha_g$
9. Calcul du taux de présence du liquide  $\alpha_l = 1 - \alpha_g$

A ce moment, les champs de vitesse sont conservatifs.

10. Résolution des équations de transport des scalaires passifs
11. Modification des propriétés physiques du liquide et du gaz
12. Estimation de la pression  $p^* = p$  jusqu'à convergence

Plusieurs raffinements sont actuellement envisagés pour accroître la vitesse de convergence :

- construction d'une équation pour la pression,
- calcul des vitesses à partir de la pression comme seul terme source, pendant les premières itérations.

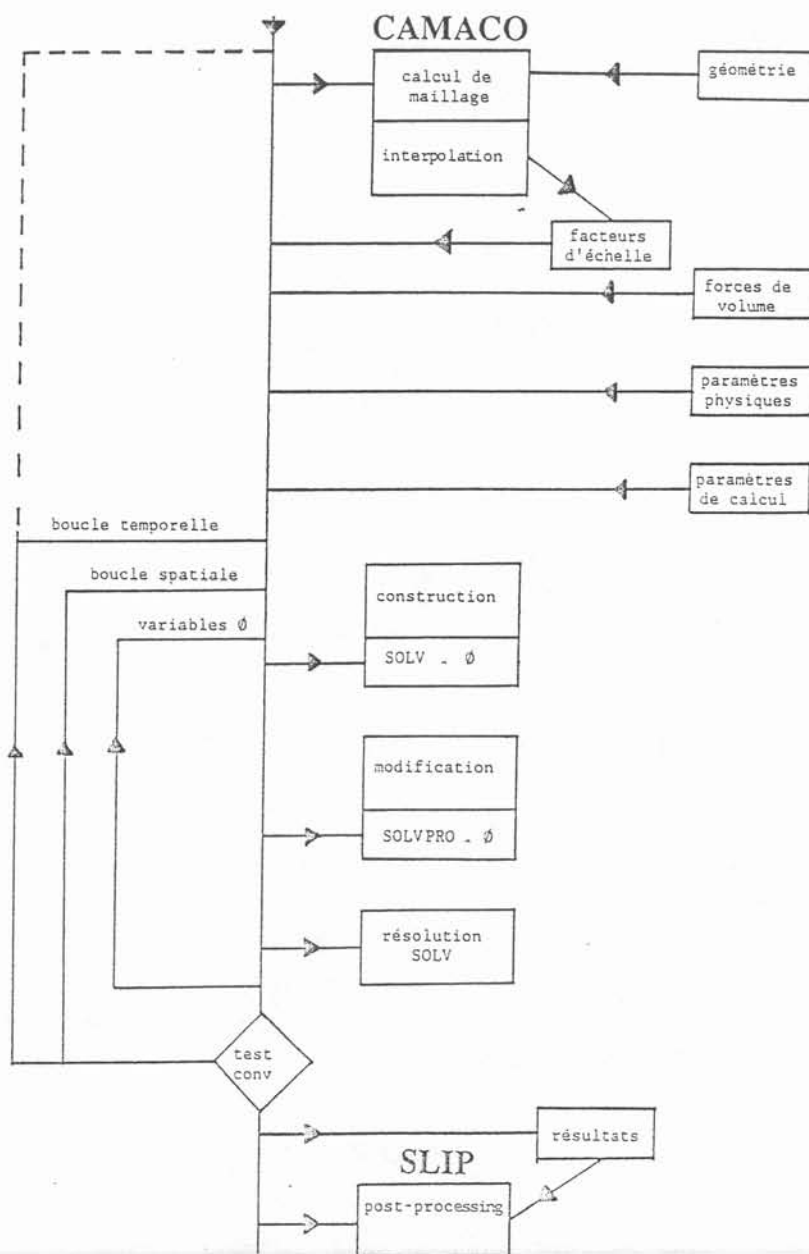
Mais leur mise en oeuvre est délicate. Signalons enfin que l'algorithme utilisé présente l'avantage d'être très résistant à une initialisation presque quelconque.

#### 4.1.7) Structure du code de calcul

La figure 4.4 représente l'architecture du programme GALILAI. Celui-ci possède une structure modulaire permettant de regrouper toutes les conditions aux limites dans un sous-programme (SOLVPRO). Le programme principal, dans lequel sont introduits les données du problème (géométrie, forces, rhéologie) et les paramètres de calcul, fait successivement appel aux divers sous-programmes construisant les équations à résoudre (SOLVU). Un sous-programme (SOLV) résout partiellement ces équations jusqu'à convergence du système global.

Compte tenu de la méthode de résolution choisie, l'ensemble du programme GALILAI peut être vectorisé, à l'exclusion du sous-programme de résolution SOLV. Ce sous-programme de résolution partielle est très simple, mais dans l'optique d'utilisation d'ordinateurs vectoriels, une méthode vectorisable devra être préférée.

Figure 4.4 : Structure du code GALILAI.



#### 4.2) Le couplage hydrodynamique métal-laitier

Le couplage hydrodynamique doit permettre de vérifier les relations suivantes :

- a) profil logarithmique de la vitesse déficitaire du métal près de l'interface :

$$\frac{u_p - U_s}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \log(\beta y^+) \quad (4.5)$$

Il conviendra de vérifier cette hypothèse et de la discuter.

Il est à noter que la valeur de l'énergie cinétique de la turbulence calculée près de l'interface pourra être comparée à la valeur empirique :

$$k_p = C_\mu^{-1/2} u_*^2 \quad (4.6)$$

- b) égalité entre les frottements interfaciaux dans le métal et dans le laitier :

$$-\frac{3\mu U_s}{h} = -\rho u_*^2 = -\rho \frac{u_p - U_s}{\frac{1}{\kappa} \log(\beta y^+)} C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}$$

soit encore

$$\frac{u_p}{U_s} = 1 + \frac{3\mu \frac{1}{\kappa} \log(\beta y^+)}{h \rho C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}} \quad (4.7)$$

- c) hauteur de laitier telle que (3.11) et (3.12) :

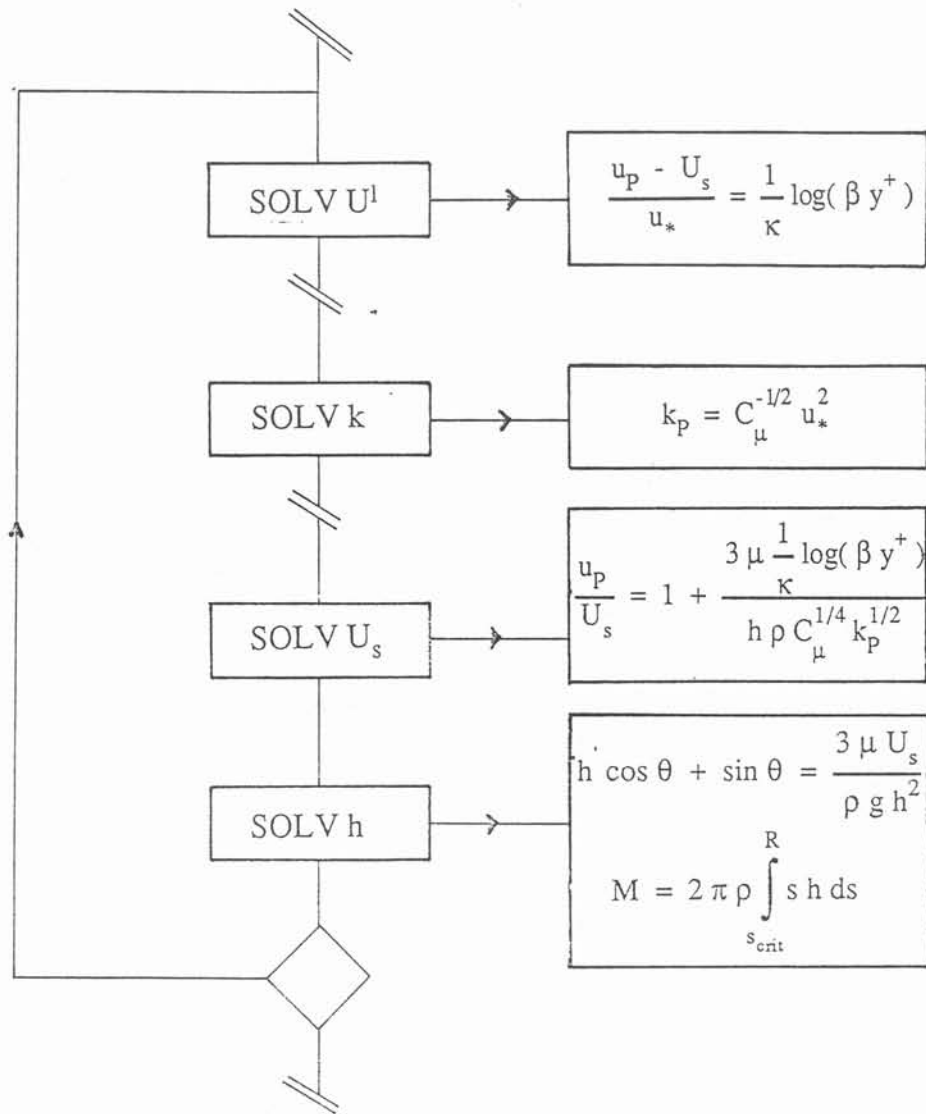
$$h \cos \theta + \sin \theta = \frac{3\mu U_s}{\rho g h^2} \quad M = 2\pi \rho \int_{s_{crit}}^R s h ds$$

L'algorithme initial (§4.1.6, figure 4.4) est modifié par l'introduction de deux sous-programmes de calcul de la vitesse à l'interface métal-laitier et de la hauteur de laitier (figure 4.5).

#### 4.3) Transfert de masse métal-laitier

L'équation (3.22) régissant les transferts métal-laitier est discrétisée par différences finies en utilisant un schéma spatio-temporel implicite aux différences finies /4.24/. Elle est résolue par une méthode itérative car couplée avec l'équation de transport de la concentration dans le métal.

Figure 4.5 : Couplage métal-laitier.





#### 4.4) Aspects numériques

##### 4.4.1) Problèmes de mise en oeuvre du code de calcul

Au paragraphe 4.1.4.4, nous avons mentionné le cas particulier de l'équation de conservation de la masse du gaz qui nous sert à calculer le taux de présence du gaz. Au cours des itérations, des valeurs non physiques peuvent apparaître /4.22/ car le défaut de masse qui intervient ( $\sum C_i$ ) ne représente pas la divergence et ne tend donc pas vers zéro quand nous nous rapprochons de la solution. Ce problème disparaît si nous utilisons une relaxation importante (0.1 pour le taux de présence, 0.3 pour les vitesses et les paramètres de la turbulence et 0.5 pour la pression) au début du calcul, surtout si l'initialisation est quelconque. Signalons ainsi qu'à très fort débit, les équations de transport de la quantité de mouvement du gaz doivent être hyperboliques. La résolution de ces équations par la méthode présentée n'est plus adaptée. C'est un aspect important à préciser à l'avenir.

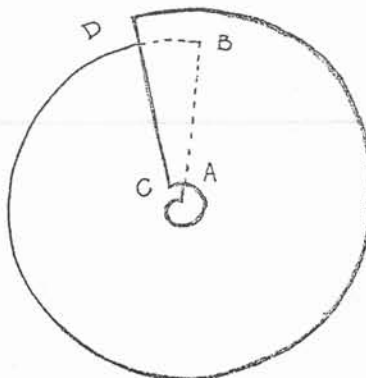
De façon classique, il importe en outre d'initialiser correctement les champs de vitesses moyennes et les grandeurs de la turbulence pour converger correctement et rapidement (voir /4.16/). En particulier, quand un paramètre de calcul (viscosité, masse volumique, débit, taille de cuve...) est modifié, initialiser avec une solution obtenue avec une autre valeur de ce paramètre est une astuce très économique.

De part les expériences numériques, il existe un débit critique à un maillage donné au delà duquel nous n'avons pu calculer une solution bidimensionnelle permanente. A cette constatation, nous pouvons répondre par deux hypothèses :

a) c'est l'instabilité du jet gazeux observée expérimentalement et décrite au paragraphe 5.5.11 (peu probable).

b) c'est une instabilité intrinsèque à l'équation de transport de la quantité de mouvement du gaz (hyperbolique à fort débit car le taux de présence augmente et les fluides équivalents introduits par l'opération de moyenne sont alors compressibles). Nous savons que dans ce cas, il existe une condition (condition de Courant-Friedrich-Levy) sur un paramètre  $m$  (fonction d'une célérité et des pas de discrétisation spatial et temporel). Il est fort possible qu'à fort débit, la condition de stabilité ( $m < 1$ ) ne soit plus vérifiée. Il sera intéressant de chercher à l'avenir une solution tridimensionnelle instationnaire à cet écoulement.

Le dernier aspect problématique est plus technique : il concerne le cas des domaines cylindriques. Des travaux antérieurs ont mis en évidence que de simples conditions de périodicité entre les frontières fictives AB et CD introduisent un gradient de pression orthoradial /4.24/. Ce problème, mineur, a été résolu en effectuant un recouvrement de ces frontières (voir schéma ci-dessous). Il est de même important de noter les conditions aux limites employées sur l'axe de symétrie en trois dimensions /4.24/.



#### 4.4.2) Support informatique

La mise au point du code de calcul a été réalisée sur des stations APOLLO (DOMAIN) du type DN3000, mini-ordinateurs 32-bits dont la taille de la mémoire centrale est de 4 Mo au maximum. Les exploitations ont été effectuées sur un mini-processeur vectoriel ALLIANT FX/4, doté de 25 Mo de mémoire centrale (à MADYLAM) et sur un VAX 6040 (à l'I.R.SID.).

Il existe deux versions de ce programme :

- l'une, bidimensionnelle pour les écoulements axisymétriques,
- l'autre, tridimensionnelle si l'écoulement est tridimensionnel, c'est à dire si l'injecteur est excentré, où s'il y a plusieurs injecteurs.

A titre indicatif, pour un maillage bidimensionnel de  $22^2$  points intérieurs, le programme occupe 0.27 Mo en mémoire centrale. La version tridimensionnelle occupe 1.3 Mo en mémoire centrale pour un maillage de  $22^3$  points intérieurs. Les temps de calcul moyens sont présentés ci-dessous :

|         | $24^2$ | $24^3$ | $34^2$ |
|---------|--------|--------|--------|
| APOLLO  | 5 h    |        |        |
| ALLIANT | 8 mn   | 5h40mn | 16mn   |

Ces temps sont à multiplier par le nombre d'utilisateurs si les stations de calcul APOLLO fonctionnent en multitâche, ou si le processeur vectoriel n'est pas utilisé suivant le système "file d'attente".

Signalons enfin qu'un post-processeur SLIP a été réalisé sur les stations APOLLO, car très bien adaptées au graphique. Nous disposons ainsi d'une bibliothèque de sous-programmes de tracer de profils, de vecteurs, de lignes et surfaces isovaleurs en couleurs.

Les calculs sont présentés dans le chapitre suivant au paragraphe 5.5, comparativement aux mesures.



## CHAPITRE V

### Expérimentations et validation

#### 5.1) Objectif

#### 5.2) Dispositif expérimental et méthode de mesure

#### 5.3) Visualisations

#### 5.4) Mesures

- 5.4.1) Taux de présence dans le panache
- 5.4.2) Vitesse de bulles (de front de bulles)
- 5.4.3) Taille de bulles
- 5.4.4) Fréquence de bulles
- 5.4.5) Vitesse moyenne et fluctuante du liquide
- 5.4.6) Vitesse directionnelle
- 5.4.7) Echelles caractéristiques
- 5.4.8) Spectre d'énergie du signal
- 5.4.9) Epaisseur de la couche d'huile

#### 5.5) Résultats et comparaisons

- 5.5.1) Taux de présence dans le panache
- 5.5.2) Fréquence de bulles
- 5.5.3) Vitesse de bulles
- 5.5.4) Durée et taille de bulles
- 5.5.5) Vitesse moyenne du liquide
- 5.5.6) Relation vitesse liquide-débit gaz
- 5.5.7) Relation vitesse liquide-diamètre de bulle
- 5.5.8) Turbulence
- 5.5.9) Spectre d'énergie
- 5.5.10) Déformation de la surface libre
- 5.5.11) Intermittence, oscillation et instabilité du jet de gaz
- 5.5.12) Couche de laitier

#### 5.6) Perspectives



## CHAPITRE V

### Expérimentations et validation

Ce chapitre comporte deux parties distinctes. La présentation de la maquette, de la méthode mesure et des différents types de mesures fera l'objet des paragraphes 5.2 à 5.4. Le résultat des mesures et la comparaison aux calculs seront exposés au cours de la seconde partie (paragraphe 5.5).

Les mesures ont été réalisées à l'I.R.SID., établissement de Maizières les Metz, dans le service P.C.M. (physico-chimie-métallurgique). Les diverses expérimentations avaient pour but de fournir des éléments de validation pour le code numérique développé au laboratoire MADYLAM de Grenoble. Nous avons utilisé une maquette froide, à eau, d'échelle réduite ( $H=500\text{mm}$ ,  $D=500\text{mm}$ ), en plexiglass pour mesurer les divers paramètres caractéristiques d'un écoulement à bulles. Des visualisations ont également été effectuées, nous donnant ainsi des valeurs de taille, de vitesse de bulles et de liquide, pour ne citer que celles-ci.

#### 5.1) Objectif

La réalisation d'une maquette à eau d'échelle réduite a été motivée par les raisons suivantes :

- obtenir des données expérimentales (mesures personnelles) afin de caler certaines constantes du modèle numérique et de valider ce dernier,
- obtenir des relations fournissant les paramètres du code de calcul (taille de bulles par exemple),
- permettre de comprendre les mécanismes qui décrivent l'interaction entre les deux phases,
- absence de problème de sécurité,
- visualisation aisée de l'écoulement.

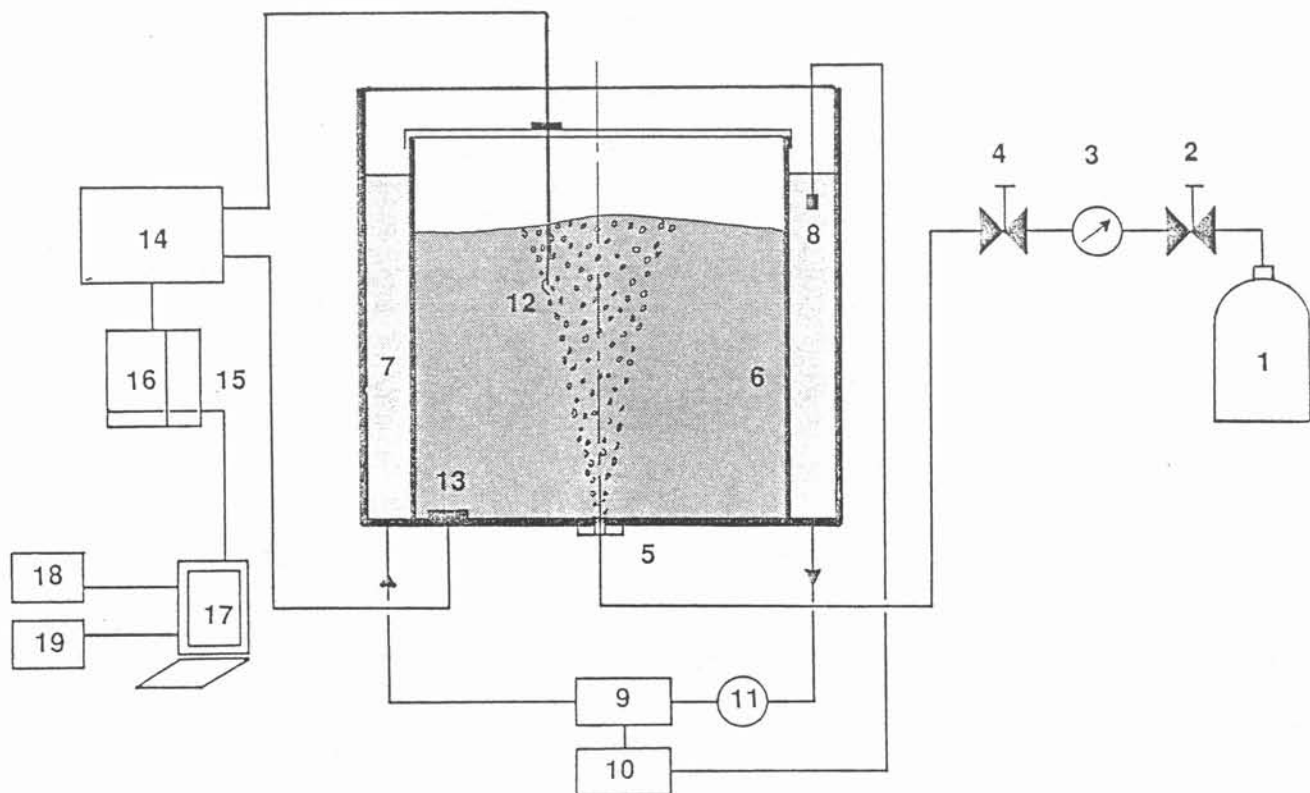
#### 5.2) Dispositif expérimental et méthode de mesure

Nous disposons d'une cuve cylindrique en plexiglass de hauteur  $H$  et de diamètre  $D=2R$  égaux à  $0.5\text{m}$ , pour simuler une poche d'aciérie industrielle. Une cuve thermostatée, carrée, de  $0.62\text{m}$  de côté entoure la cuve expérimentale et la maintient à température constante (voir figure 5.1). La cuve de simulation est remplie d'une couche d'eau (ou de solution aqueuse), d'une hauteur de  $0.3\text{m}$  en général, et d'une couche d'huile de vaseline d'une épaisseur de  $1$  à  $2\text{cm}$ , de manière à représenter le couple métal liquide-laitier. Cette cuve est munie d'injecteurs placés sur le fond et qui peuvent être centrés ou excentrés (demi-rayon ou trois-quart de rayon). De l'azote transite à travers de petites tuyères avec une pression d'alimentation inférieure ou égale à cinq bars (figure 5.2).

Ainsi le débit masse de gaz est directement lié à cette pression  $p_i$  d'alimentation (débit masse bloqué) (voir /5.1/). La figure 5.3 représente la courbe d'étalonnage d'une tuyère utilisée.

Une méthode électrochimique est utilisée pour réaliser des mesures dans le bain.

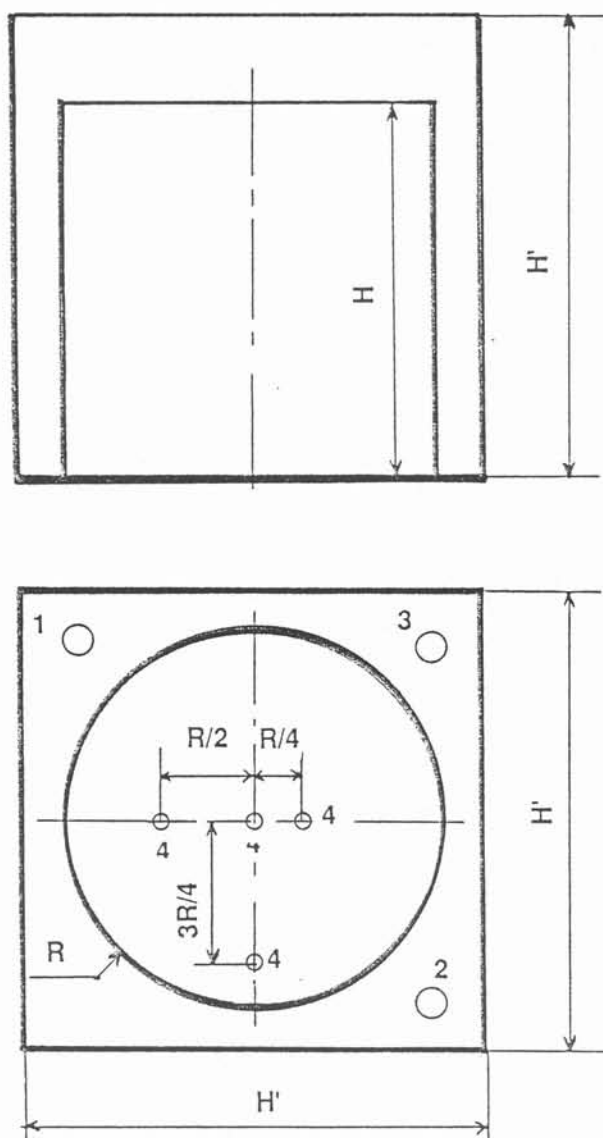
Figure 5.1 : Schéma du dispositif expérimental.



### Légende

1. Réserve de gaz
2. Vanne d'alimentation
3. Manomètre
4. Vanne de réglage
5. Tuyère d'injection
6. Cuve en plexiglass
7. Cuve thermostatée
8. Sonde de température
9. Asservissement de la température
10. Résistance de chauffage
11. Pompe
12. Sonde de mesure
13. Contre-électrode
14. Convertisseur courant-tension
15. Horloge
16. Convertisseur digital-numérique
17. Micro-ordinateur
18. Oscilloscope
19. Table traçante

Figure 5.2 : Cuve de simulation.



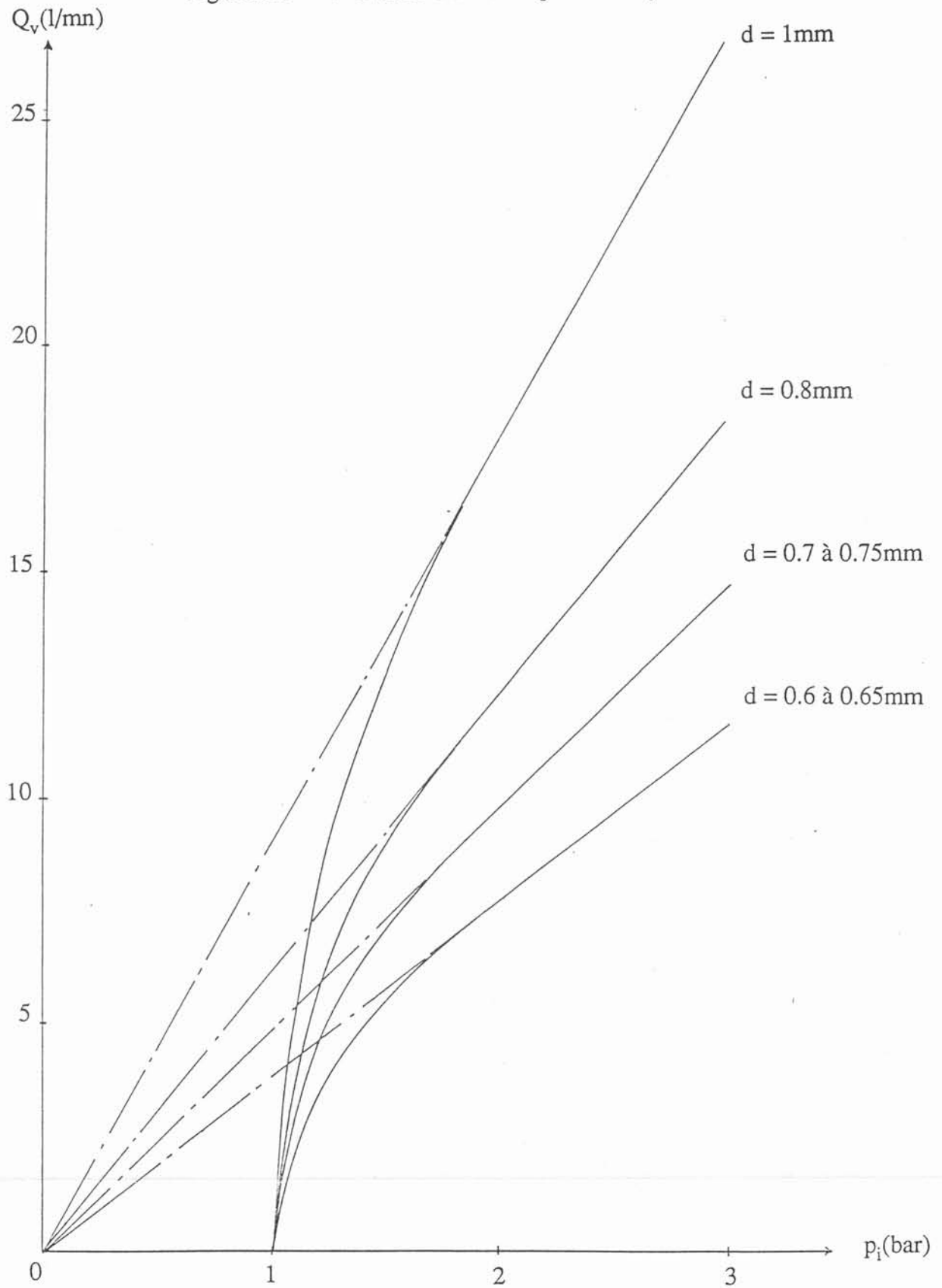
### Légende

1. Entrée du circuit d'eau (de thermostation)
2. Sortie du circuit d'eau
3. Position de la sonde de température
4. Positions possibles de la tuyère d'injection

$R$  = Rayon de la cuve = 0.500 m  
 $H$  = Hauteur de la cuve = 0.500 m  
 $H'$  = Hauteur de la cuve thermostatée = 0.620 m



Figure 5.3 : Courbe d'étalonnage d'une tuyère.



Il s'agit de la polarographie (cf Annexe V). Cette méthode est l'analogue en transfert de masse de la mesure par fil chaud à température constante en transfert de chaleur. Le courant recueilli dans le circuit électrique est relié à la vitesse du fluide environnant par une loi du type :

$$i = a \sqrt{|u|} + b \quad (5.1)$$

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions de la température et de la concentration de la solution :

$$a = a(T, c) \quad b = b(T, c)$$

Les conditions expérimentales utilisées sont telles que nous pouvons considérer la température et la concentration invariantes au cours des manipulations. Les valeurs des constantes  $a$  et  $b$  sont déterminées lors de l'étalonnage présenté en annexe V.

Le courant mesuré est converti en tension et traité à l'aide d'un système de traitement du signal décrit également en annexe V.

### 5.3) Visualisations

L'utilisation d'une cuve en plexiglass permet de visualiser l'écoulement à bulles sans problème. Plusieurs techniques ont été utilisées et ont permis d'étudier différents aspects de ce type d'écoulement :

- film cinéma 16mm rapide à 80 images par seconde :
  - mesure de vitesse de bulles et de ses variations,
  - mesure de taille de bulles,
  - détermination de la nature de l'injection de gaz,
  - compréhension du comportement du panache.
- film vidéo classique (24 images par seconde) :
  - étude des oscillations de la surface libre,
  - étude du mouvement du liquide,
  - répartition de la couche d'huile en surface.
- photographie :
  - mesure de taille de bulles,
  - mesure de vitesse du liquide à l'aide de traceurs,
  - variations de ces vitesses par chronophotographie.

Rappelons enfin la présence d'une cuve de thermostatisation carrée diminuant les distorsions optiques.

### 5.4) Mesures

Distinguons deux types de mesures effectuées sur la maquette hydraulique :

- description de l'écoulement à bulles dans le panache par l'intermédiaire des mesures de taux de présence du gaz, de vitesses, tailles, fréquences, ... de bulles (§5.4.1 à 5.4.4),

- caractérisation du brassage induit dans la phase liquide à l'aide de mesures de vitesses moyennes et fluctuantes, de spectre d'énergie, de déformation de la surface libre... (§5.4.5 à 5.4.9).

Nous allons décrire les différents types de mesures employés.

#### 5.4.1) Taux de présence dans le panache

Nous utilisons des sondes à contact dans le panache (figure A5.1). Le signal qu'elles délivrent passe d'un niveau haut quand elles se trouvent dans le liquide à un niveau bas dans le gaz. Typiquement le signal a l'allure présentée en figure 5.4 :

- il est presque carré,
- il présente un pic de remontée supérieur à la valeur moyenne du niveau haut, dû à l'existence d'un régime transitoire de rétablissement de la couche limite massique autour de la sonde.

Ainsi, l'histogramme du signal est composé de deux pics caractéristiques des niveaux hauts et bas. Le rapport de l'aire de l'un des deux pics à la surface totale fournit une mesure du taux de présence de la phase correspondante (figure 5.5). Il existe des raffinements introduits par Delhaye /5.2/ quand le taux de présence du gaz augmente beaucoup et que la zone intermédiaire de l'histogramme n'est pas proche de zéro.

L'acquisition est effectuée en continue à une fréquence de 1000 Hz, et nous comptabilisons 300.000 bulles.

#### 5.4.2) Vitesse de bulles (de front de bulles)

Ces mesures sont effectuées à l'aide d'une sonde double à contact (figure A5.1). Chaque électrode délivre un signal du type "tout ou rien" vu précédemment, identique mais décalé d'une durée  $t$  (figure 5.6). Ce décalage temporel est mesuré par la fonction d'intercorrélation des deux signaux. La distance inter-électrode étant connue, une mesure de la vitesse de bulle  $v$  est obtenue en effectuant le rapport :

$$v = \frac{d}{t} \quad (5.2)$$

Dans ce cas, le signal est échantillonné à une fréquence de 2000 Hz.

#### 5.4.3) Taille de bulles

La mesure de taille de bulles s'effectue en deux étapes :

- mesure de la durée moyenne des bulles,
- calcul de la taille par multiplication de la durée moyenne par la vitesse moyenne.

Nous faisons l'acquisition du signal à la fréquence de 5000 Hz et nous comptabilisons le passage de 10.000 bulles sur la sonde. Le signal numérique est

Figure 5.4 : Signal délivré par une voie de la sonde à contact dans le panache.

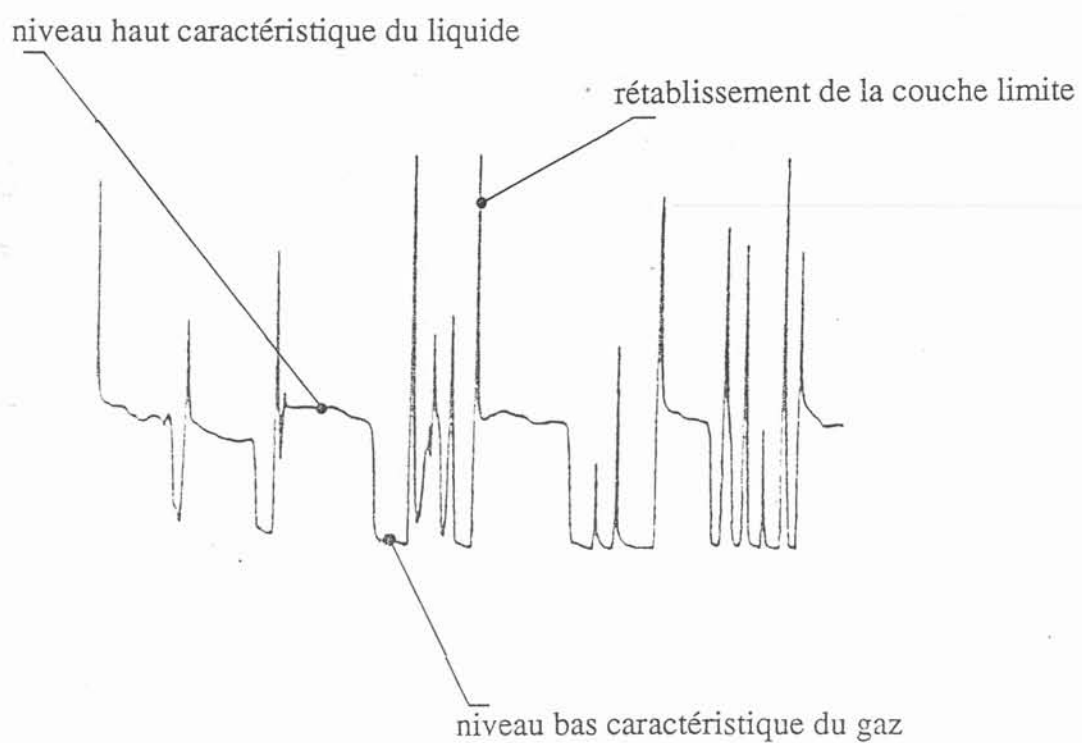


Figure 5.5 : Histogramme d'amplitude du signal.

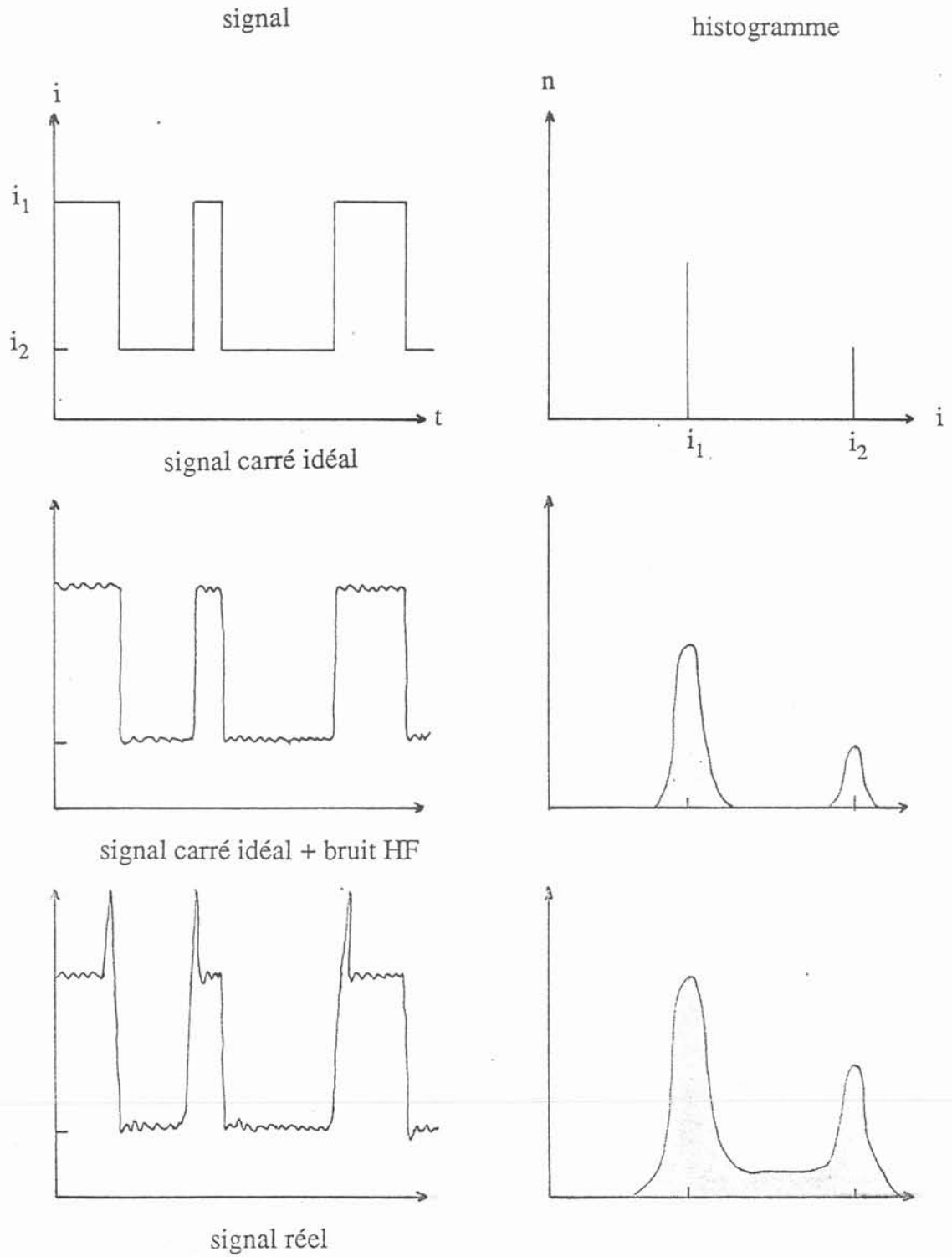


Figure 5.6 : Signaux délivrés par les deux voies de la sonde à contact.

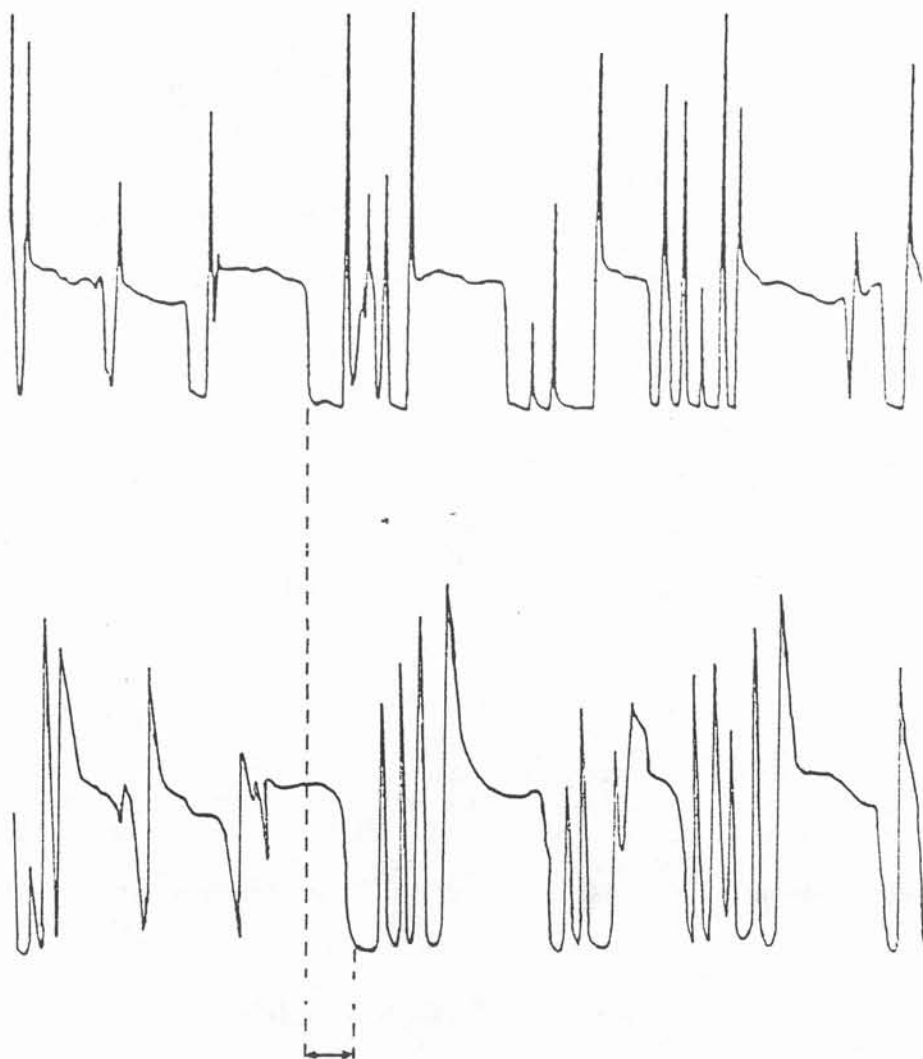
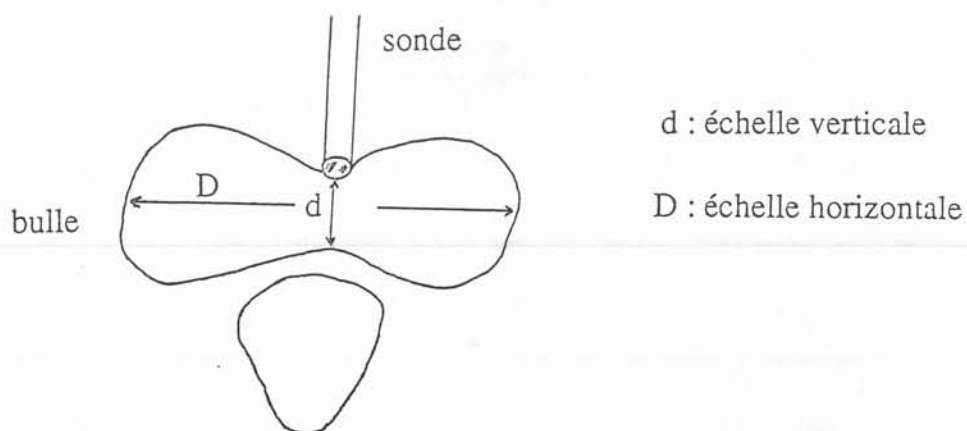


Figure 5.7 : Taille caractéristique de bulle.



transformé en "tout ou rien". Un traitement statistique classique /5.3/ permet enfin d'obtenir la durée moyenne des bulles au point de mesure. De cette manière, nous avons accès à la dimension verticale des bulles. Celles-ci peuvent en effet posséder deux échelles caractéristiques (voir figure 5.7).

La mesure de la taille moyenne des bulles serait affinée en associant à chaque classe de taille de bulles sa vitesse moyenne.

La figure 5.8 met en évidence une deuxième méthode de mesure des vitesses et des tailles de bulles : la chronophotographie. La vue d'ensemble de l'écoulement à un instant donné que procure cette méthode complète l'étude du panache.

#### 5.4.4) Fréquence de bulles

La fréquence des bulles est une information importante caractérisant le panache bien qu'elle ne soit pas un élément de comparaison direct avec le modèle dans sa version actuelle. Si, dans une extension future, la prédiction des phénomènes de fractionnement-coalescence était introduite, cette information trouverait sa raison d'être. La fréquence moyenne  $f$  de passage de bulles est calculée comme le rapport du nombre de bulles  $n$  comptabilisées dans un intervalle de temps  $t$  :

$$f = \frac{n}{t} \quad (5.3)$$

Mais cette fréquence moyenne ainsi calculée est la fréquence de l'écoulement équivalent pour lequel les bulles seraient régulièrement distribuées dans le temps. En réalité, ce n'est pas le cas, et ce faisant, nous perdons de l'information. Cette méthode filtre en particulier les basses fréquences caractéristiques de paquets de bulles, que nous pouvons détecter simplement avec une caméra rapide ou une photographie.

#### 5.4.5) Vitesse moyenne et fluctuante du liquide

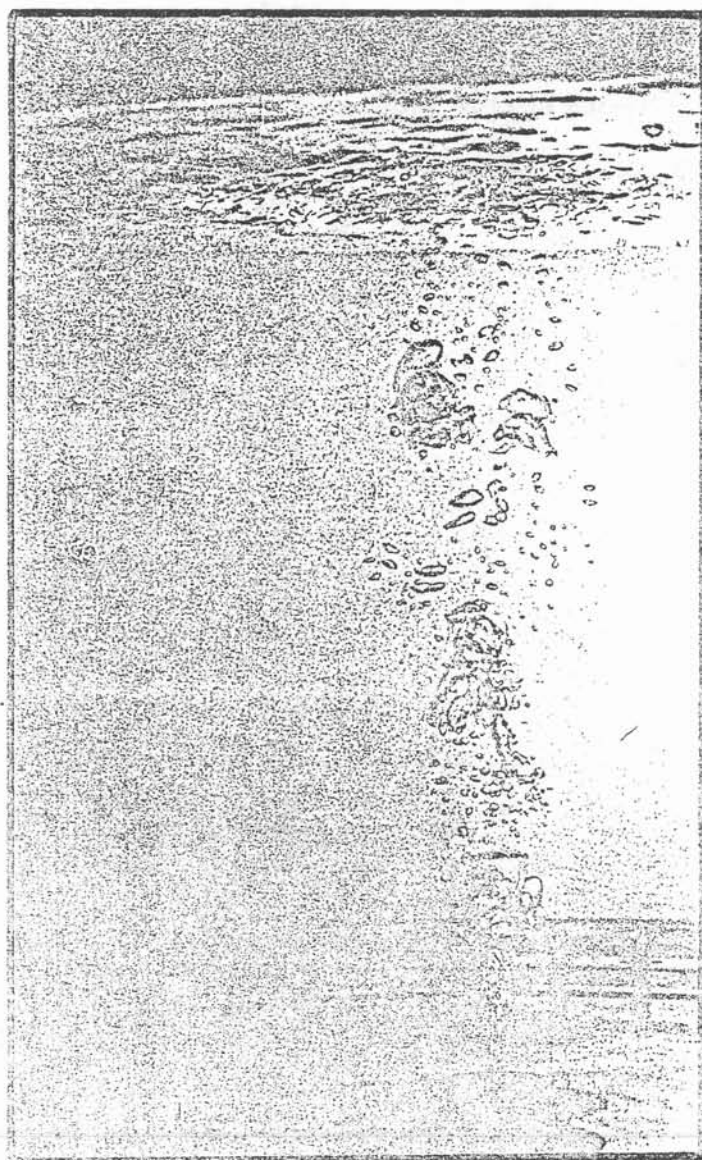
Nous utilisons une sonde simple à fil (voir figure A5.1) pour mesurer les vitesses moyennes et fluctuantes en dehors du panache. L'intensité du courant instantané est relié à la vitesse instantanée du liquide par la relation (5.1). Décomposons la vitesse et le courant en partie moyenne et partie fluctuante :

$$\begin{aligned} i &= I + i' \\ u &= U + u' \end{aligned} \quad (5.4)$$

Alors dans la limite où l'intensité de la turbulence reste faible, que nous plaçons la sonde de mesure dans une zone où nous connaissons la direction de la vitesse (paroi, surface libre, fond...), la moyenne statistique de la relation (5.1) nous conduit aux expressions (5.5) et (5.6) de la vitesse moyenne et de la moyenne quadratique de sa fluctuation :

$$a^2 U = (I - b)^2 + \overline{i'^2} \quad (5.5)$$

Figure 5.8 : Chronophotographie du panache.





$$a^4 \overline{u^2} = I^4 \tau_i^4 (P - 1) + 4(I - b) I^3 \tau_i^3 S + 4(I - b)^2 I^2 \tau_i^2 \quad (5.6)$$

avec l'introduction du taux de fluctuation  $\tau_i$ , du facteur de dissymétrie  $S$  et du facteur d'aplatissement  $P$  :

$$I \tau_i = \sqrt{\overline{i^2}} \quad \left( \overline{i^2} \right)^{3/2} S = \overline{i^3} \quad \left( \overline{i^2} \right)^2 P = \overline{i^4} \quad (5.7)$$

où nous reconnaissons les moments d'ordre 3 et 4 de l'histogramme d'amplitude. Ce dernier est d'ailleurs obtenu en échantillonnant le signal à la fréquence de 500Hz (voir figure 5.9).

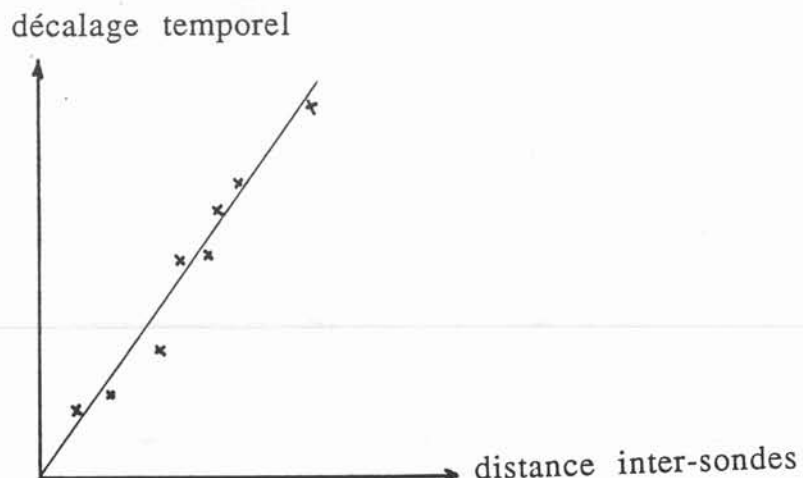
#### 5.4.6) - Vitesse directionnelle

Utilisons deux sondes simples à fil (figure A5.1), placées parallèlement dans l'écoulement, pour mesurer la composante de vitesse perpendiculaire à leur plan. Connaissant la distance, inter-sonde  $d$  et le décalage temporel  $t$  des deux signaux délivrés par chaque sonde figure 5.10, qui représente le temps de convection des tourbillons énergétiques, la composante de vitesse  $v$  perpendiculaire aux sondes est à nouveau évaluée à l'aide de la relation (5.2).

Le décalage temporel  $t$  est mesuré par la fonction d'intercorrélation des deux signaux. Il correspond au temps pour lequel cette fonction atteint son maximum, la valeur maximale étant elle une mesure du taux de ressemblance des deux signaux. Typiquement, nous réalisons un échantillonnage du signal à une fréquence de 1500 Hz. Les sondes sont séparées d'une distance variable de l'ordre de 5mm. Cette variation possible de la distance inter-sonde est importante car suivant la vitesse de l'écoulement, si les sondes sont trop rapprochées, nous avons une grande imprécision sur la mesure du décalage temporel, et si les sondes sont trop éloignées, les signaux peuvent très bien être totalement décorrélés.

Cette distance peut être évaluée à l'aide de la fonction d'autocorrélation du signal, en lui attribuant la valeur de l'échelle intégrale par exemple (voir §5.4.7).

Certains auteurs [5.4] préconisent de calculer ensuite la vitesse en prenant la pente de la courbe  $d=d(t)$  :



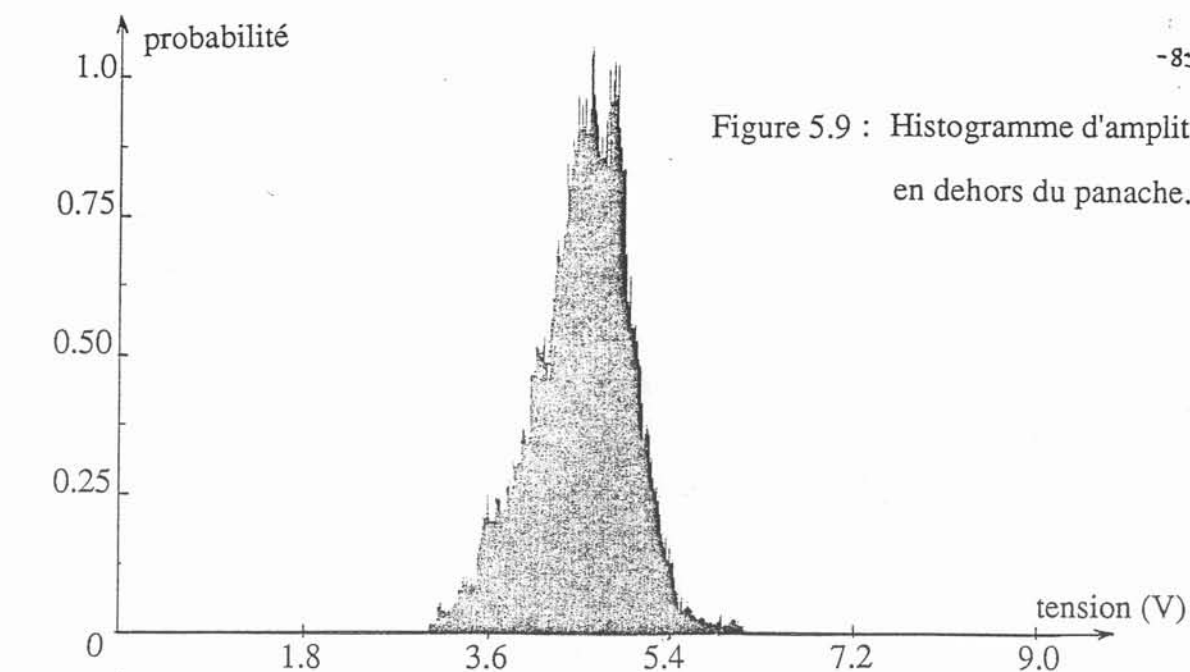


Figure 5.9 : Histogramme d'amplitude en dehors du panache.

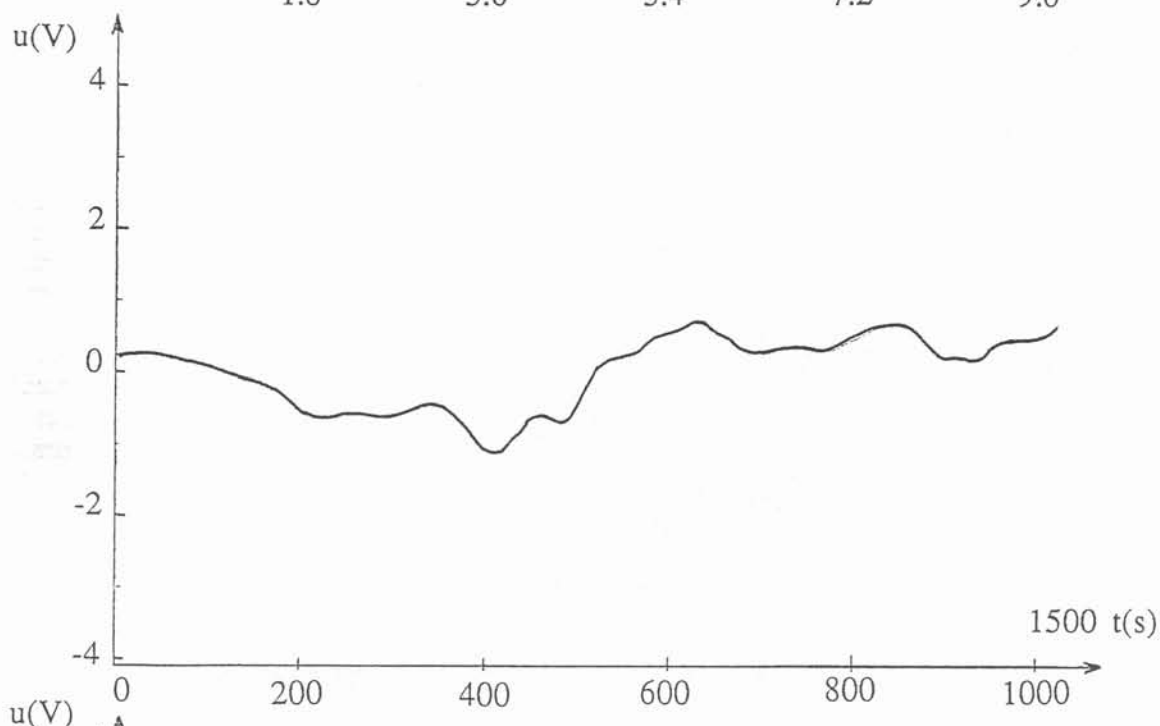
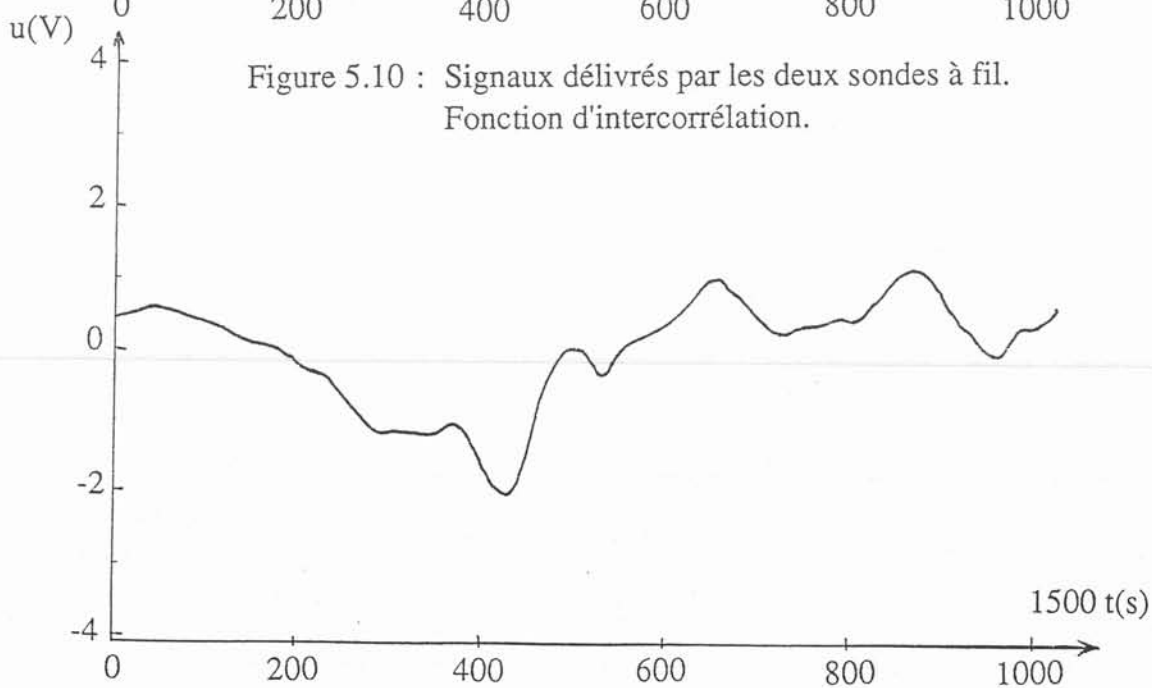


Figure 5.10 : Signaux délivrés par les deux sondes à fil.  
Fonction d'intercorrélation.



Cette méthode de mesure de composante de vitesse nous était apparue prometteuse. Mais elle s'avéra rapidement inappropriée pour le type d'écoulement étudié et fut abandonnée, pour les raisons suivantes :

- il arrive que de gros tourbillons peuvent arriver sur les sondes de mesure en même temps, nous conduisant ainsi à un décalage temporel nul.

- comme nous l'expliquerons aux paragraphes 5.5.7 et 5.5.9, le bain liquide par endroit et par moment bouge en bloc à une fréquence qui est une fréquence propre de la surface libre conduisant dans ce cas à un décalage infini.

### 5.4.7) Echelles caractéristiques

La connaissance des échelles spatiales et temporelles des structures énergétiques et dissipatives est une information importante caractéristique d'un écoulement turbulent. Ces valeurs peuvent être évaluées à partir du spectre d'énergie ou de la fonction d'autocorrélation du signal. Celle-ci est non nulle tout le temps qu'un tourbillon est détecté par la sonde de mesure. Les trois échelles principales sont définies ainsi :

- + *macro échelle de temps* :  $T_{ma}$ , représente la plus longue durée de passage d'un tourbillon observée (plus gros tourbillon énergétique). Elle est calculée en prenant l'intersection de la fonction d'autocorrélation avec l'axe des abscisses.

- + *échelle intégrale* :  $T_i$ , durée moyenne des tourbillons. Elle se calcule comme la moyenne de la fonction d'autocorrélation entre 0 et la macro échelle  $T_{ma}$ .

- + *micro échelle* :  $T_{mi}$ , durée minimale de passage d'un tourbillon (plus petit tourbillon énergétique). Elle porte le nom d'échelle de Taylor. Nous la calculons en intégrant le spectre d'énergie  $E(k)$  multiplié par  $k^2$  :

$$\overline{u'^2} \lambda^{-2} = \int k^2 E(k) dk \quad k : \text{nombre d'onde}$$

Des échelles de longueurs analogues sont construites à partir des échelles de temps en les multipliant par la vitesse moyenne du fluide en ce point.

### 5.4.8) Spectre d'énergie du signal

Le signal est échantillonné à une fréquence variant entre 10 hertz (zone inertielle) et 100 hertz (structures dissipatives).

L'emploi de fenêtre d'apodisation en cosinus pour le calcul de la transformée de Fourier ne s'est pas avéré primordial.

Notons que l'intégrale de zéro à l'infini du spectre d'énergie nous fournit une mesure de l'énergie cinétique de la turbulence :

$$k = \frac{3}{2} \overline{u'^2} = \frac{3}{2} \int E(k) dk$$

Le taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence en est déduit

simplement par la relation :

$$\varepsilon = 10 \nu \frac{\int E(k) dk}{\int k^2 E(k) dk}$$

#### 5.4.9) Epaisseur de la couche d'huile

Rappelons que pour simuler le rôle du laitier nous déposons en surface une couche d'huile visqueuse et peu dense. Sous l'effet du jet de gaz, un dôme se forme. L'huile est repoussée vers la paroi.

La configuration de la couche d'huile est déterminée et mesurée en filmant la cuve en vue de dessus et en vue de côté à l'aide d'une caméra vidéo.

#### 5.5) Résultats et comparaisons

Nous allons présenter maintenant le résultat des mesures réalisées dans la cuve cylindrique décrite au paragraphe 5.2.

##### 5.5.1) Taux de présence dans le panache

Il ressort des mesures effectuées que la dispersion des bulles suit un processus stochastique. Nous constatons que la distribution radiale du taux de présence peut en effet être approchée par une loi gaussienne :

$$\alpha = \alpha_0 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad (5.8)$$

avec

|                 |   |
|-----------------|---|
| $\alpha(r,z,Q)$ | taux de présence,   |
| $\alpha_0(z,Q)$ | taux de présence sur l'axe,                                   |
| $\sigma(z,Q)$   | paramètre de la gaussienne,                                   |
| $r$             | distance à l'axe du panache centré par rapport à l'injecteur, |
| $z$             | hauteur,  |
| $Q$             | débit de gaz injecté.   |

Posons  $b=3\sigma$ ;  $b$  représente une mesure de la taille du panache parce que cette valeur de rayon correspond à un taux de présence égal à 0.3% de sa valeur sur l'axe. Nous présentons les résultats sous forme adimensionnelle en figure 5.11 par le tracé de la courbe :

$$\alpha / \alpha_0 = f(r^2 / 3 \sigma^2)$$

à différentes hauteurs dans la cuve et pour différents débits.

Figure 5.11 : Taux de présence.  
(courbe adimensionnelle).

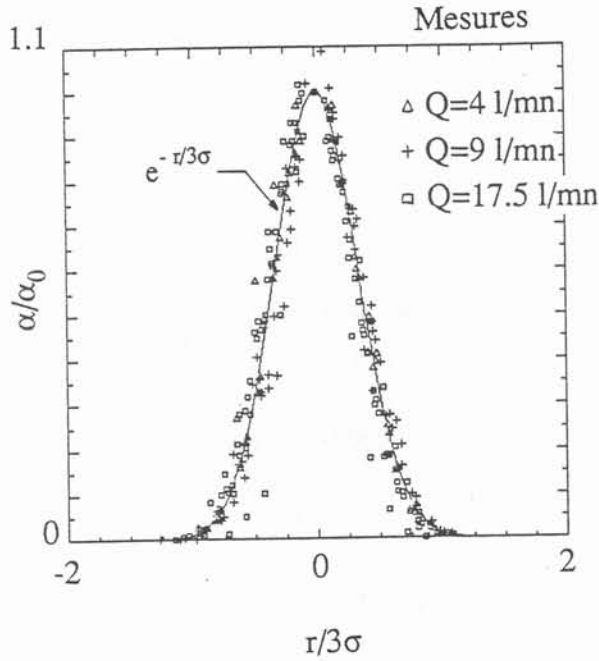


Figure 5.13 : Profils radiaux de taux de présence.  
Comparaison centré-excentré.  
Mesures.  $Q=4$  l/mn

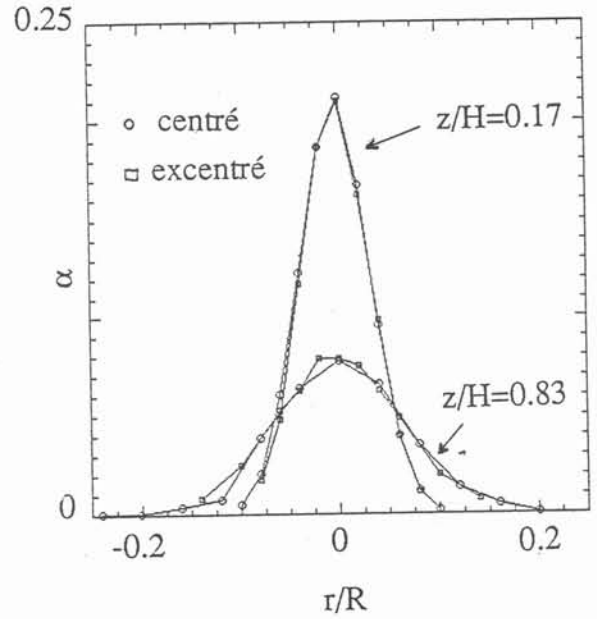
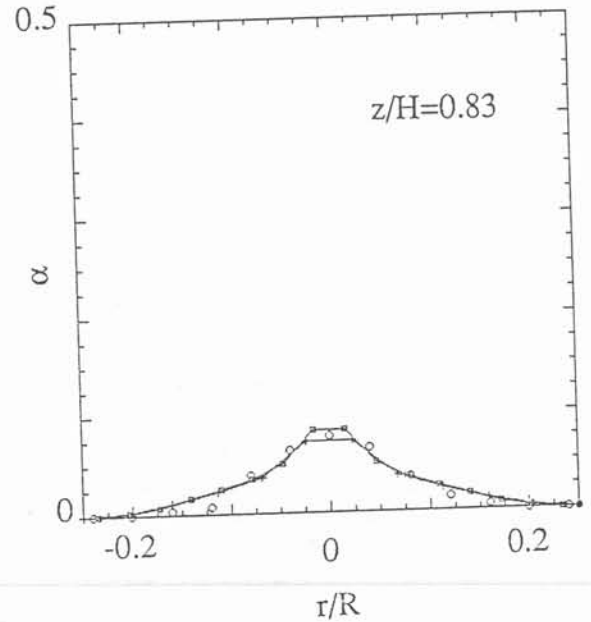
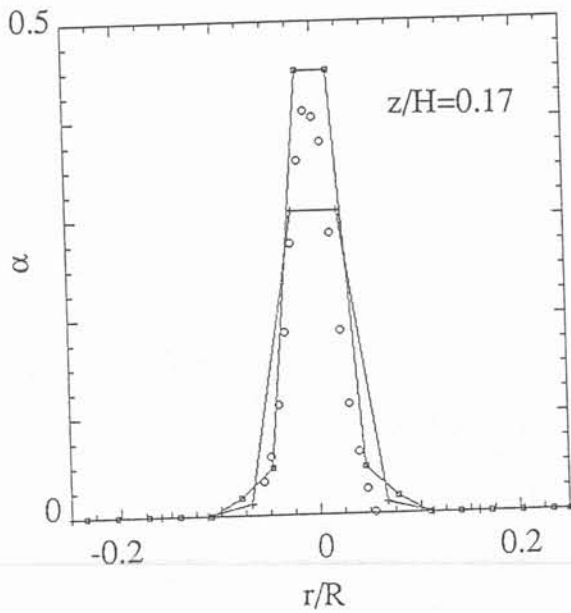


Figure 5.12 : Profils radiaux de taux de présence en injecteur centré.  
Comparaison mesures-calculs.

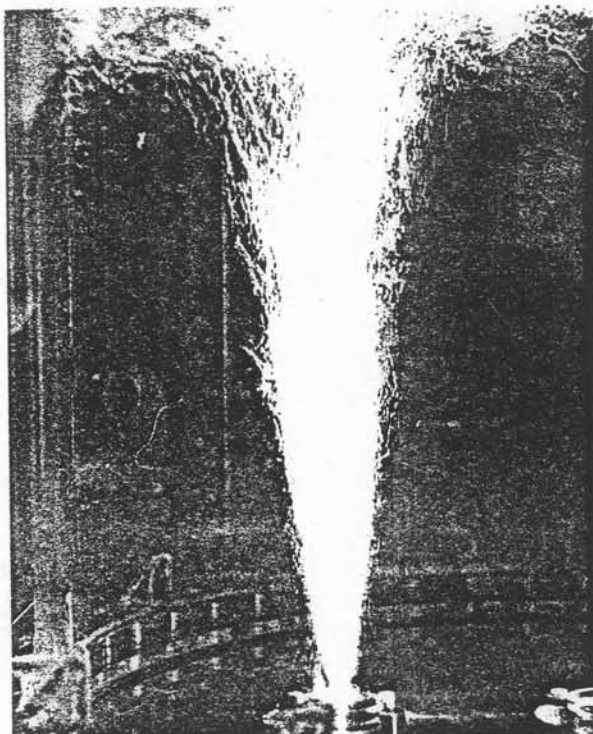


$Q=9$  l/mn

- mesures IRSID
- + calculs 22x22
- calculs 32x32

Nous donnons quelques profils radiaux de taux de présence en injection centrée et excentrée à mi-rayon (figures 5.12 et 5.13). Il ressort des mesures effectuées que le décentrement n'a pas un effet sensible sur les profils de taux de présence. L'observation de la cuve permet de dire que le panache s'incline légèrement quand l'injecteur est excentré. Cette observation devra être confirmée par des mesures de taux de présence à plus fort débit et avec un décentrement plus important.

Les figures 5.12 et 5.13 montrent également comment se comporte le modèle numérique dans le panache. Les prédictions sont en bon accord avec les mesures, quel que soit le type d'injection. Il ressort, de plus, qu'un maillage somme toute peu fin (22<sup>2</sup>)



photographie du panache

$Q=17.5$  l/mn

injection excentrée (R/2)

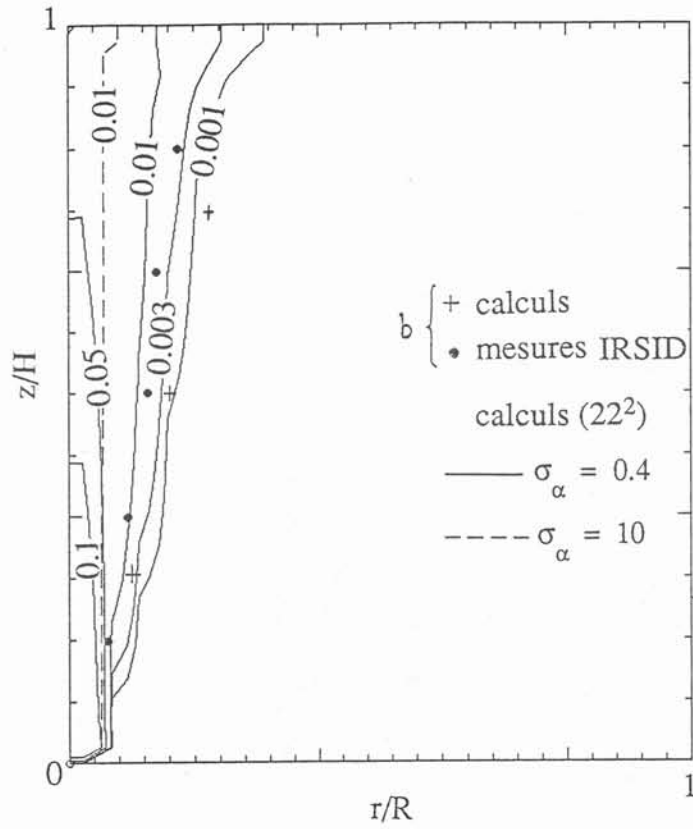
est presque suffisant pour calculer le moteur de notre écoulement. Celui-ci est bien décrit figures 5.14 par le tracé des courbes d'isovaleurs du taux de présence; nous pouvons ainsi observer la variation de l'évasement du panache avec le débit de gaz injecté.

Une façon de caractériser l'étendue radiale du panache est d'introduire "le rayon un demi"  $r_{1/2}$ . C'est la valeur du rayon pour lequel la valeur du taux de présence est diminuée de moitié par rapport à sa valeur maximale sur l'axe. Ce paramètre est une fonction croissante du débit  $Q$  et de la côte  $z$  (figure 5.15). Il varie comme  $z^{0.77}$ , en accord avec /5.5/. Il semble que pour un injecteur de plus grande taille (6mm), la variation soit différente, en  $z^{0.50}$  d'après /5.6/.

Une autre façon de caractériser le panache, nous l'avons vu est d'étudier les variations de la valeur maximale du taux de présence sur l'axe  $\alpha_0$  :

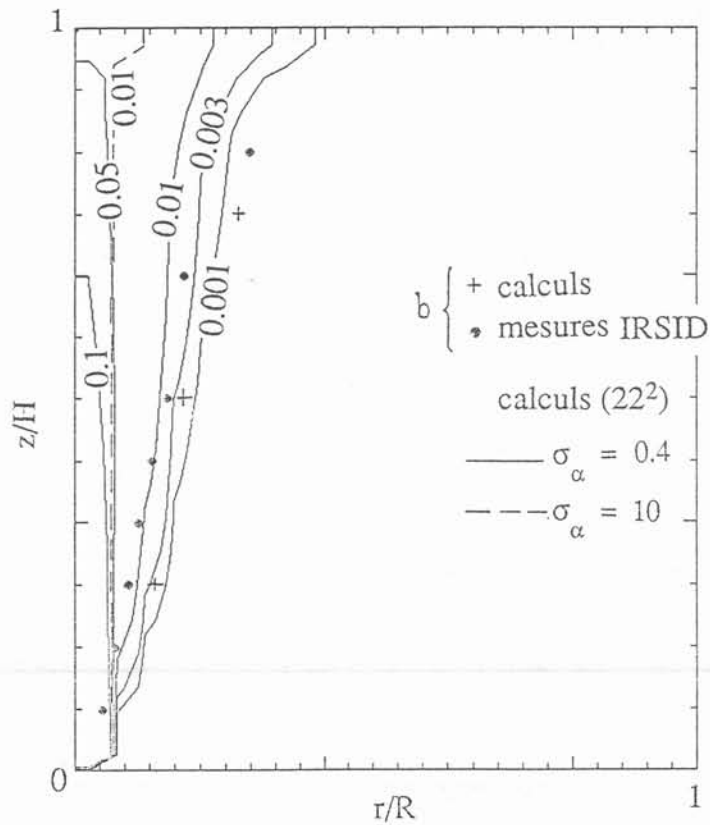
- *influence de la côte  $z$*  : le taux de présence axial  $\alpha_0$  décroît avec la côte  $z$  suivant une fonction hyperbolique si nous nous plaçons suffisamment loin de l'injecteur (figure 5.16). Nous retrouvons ainsi les résultats de /5.6/.

- *influence du débit  $Q$*  :  $\alpha_0$  varie comme  $Q^{0.50}$ .



$Q=4$  l/mn

b tel  $\frac{\alpha(r=b)}{\alpha(r=0)} = 0.003$



$Q=9$  l/mn

Figure 5.14 : Lignes isovaleurs du taux de présence en injecteur centré.  
Comparaison mesures-calculs.

Figure 5.15 : Profils axiaux du rayon un demi.  
Mesures.

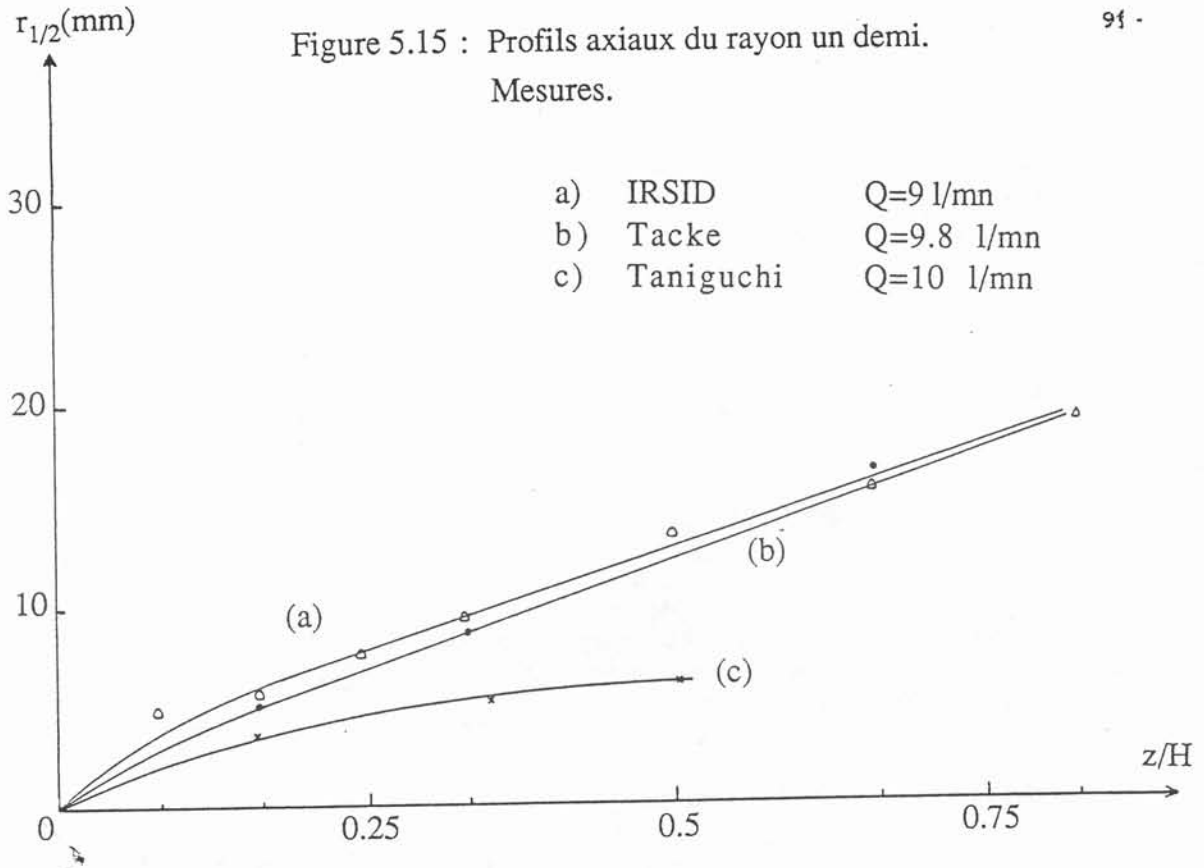
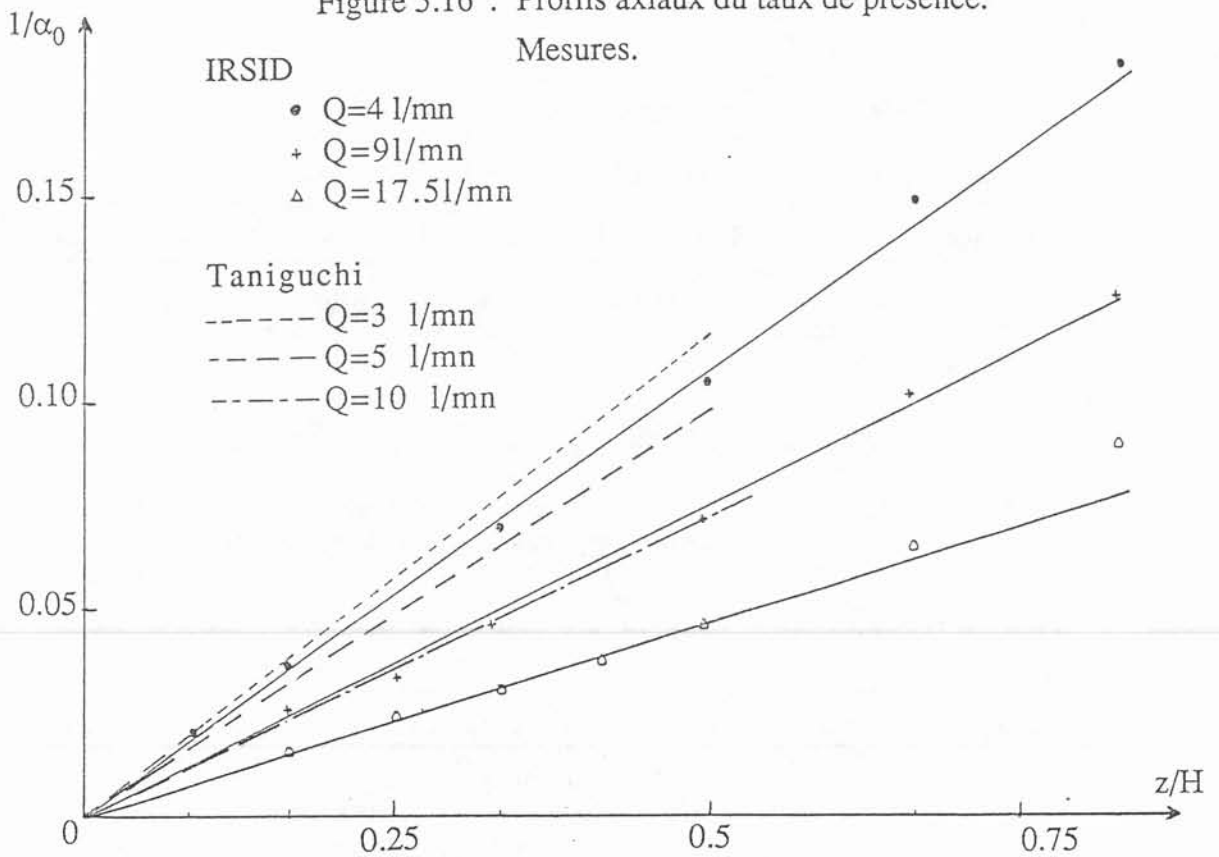


Figure 5.16 : Profils axiaux du taux de présence.  
Mesures.





Les résultats de /5.5/ diffèrent des nôtres en ce sens qu'il apparaît une erreur systématique sur la mesure du taux de présence. Près de l'injecteur, en effet, le taux de présence ne tend pas vers 100% (voir /5.7/).

### 5.5.2) Fréquence de bulles

Les résultats obtenus sont présentés figure 5.17 et comparés à ceux de /5.5/. De la même façon que le taux de présence, la fréquence de bulle décroît suivant une loi hyperbolique avec la côte  $z$  et suivant une gaussienne radialement.

### 5.5.3) Vitesse de bulles

Les résultats obtenus par les mesures et le calcul sont présentés figure 5.18. La vitesse axiale décroît rapidement depuis l'injecteur jusqu'au milieu de la cuve pour tendre vers une vitesse limite près de la surface libre ne variant que peu avec le débit. Les vitesses mesurées sont comparables à celles de /5.5/, obtenues avec un injecteur de diamètre 0.5mm.

### 5.5.4) Durée et taille de bulles

Les mesures montrent que la durée axiale de bulle augmente rapidement dans la moitié inférieure de la cuve pour tendre vers une valeur ne variant que très peu avec le débit près de la surface libre.

Quant à la taille caractéristique de bulle, nous concluons figure 5.19 qu'elle ne varie guère avec la position ou avec le débit. Cette remarque nous conforte dans l'idée que le paramètre diamètre de bulle n'est pas si crucial pour le code de calcul qu'il n'y semble.

### 5.5.5) Vitesse moyenne du liquide

Avec une injection centrée, les cartes des vitesses calculées (figure 5.21) et obtenues par photographie (figure 5.20) dans un plan diamétral nous montrent un écoulement recirculant classique. Le liquide est entraîné par le gaz dans le panache alors qu'il est animé d'un mouvement descendant près de la paroi latérale. Les profils de module de vitesse mesurés et calculés dans l'hypothèse d'un écoulement axisymétrique sont peu différents (figure 5.21) à l'extérieur ou à l'intérieur du panache.

Quand l'injecteur est décentré à **mi-rayon**, l'écoulement résultant n'est pas celui auquel nous pourrions nous attendre. Ainsi les résultats d'une simulation numérique de Sawada /5.8/ sont en complet désaccord avec nos calculs, nos mesures et nos visualisations de l'écoulement. La principale différence se situe dans le plan diamétral, côté paroi opposé à l'injecteur. Tant nos mesures que nos calculs montrent en effet un mouvement ascendant bien marqué alors que Sawada prédit l'existence d'un tourbillon occupant tout le demi plan opposé à l'injecteur. Cette différence s'explique si nous regardons de plus près comment est traduit le couplage métal-gaz dans le modèle de Sawada. Il s'agit d'un modèle à une phase où l'action de la phase dispersée est directement introduite dans l'équation de transport de la quantité de mouvement du liquide. Son modèle conduit à une force résultante trop importante : en conséquence, les vitesses dans le panache et à la surface libre sont plus grandes, le panache est moins étendu et les mouvements de surface induisent une recirculation incorrecte.

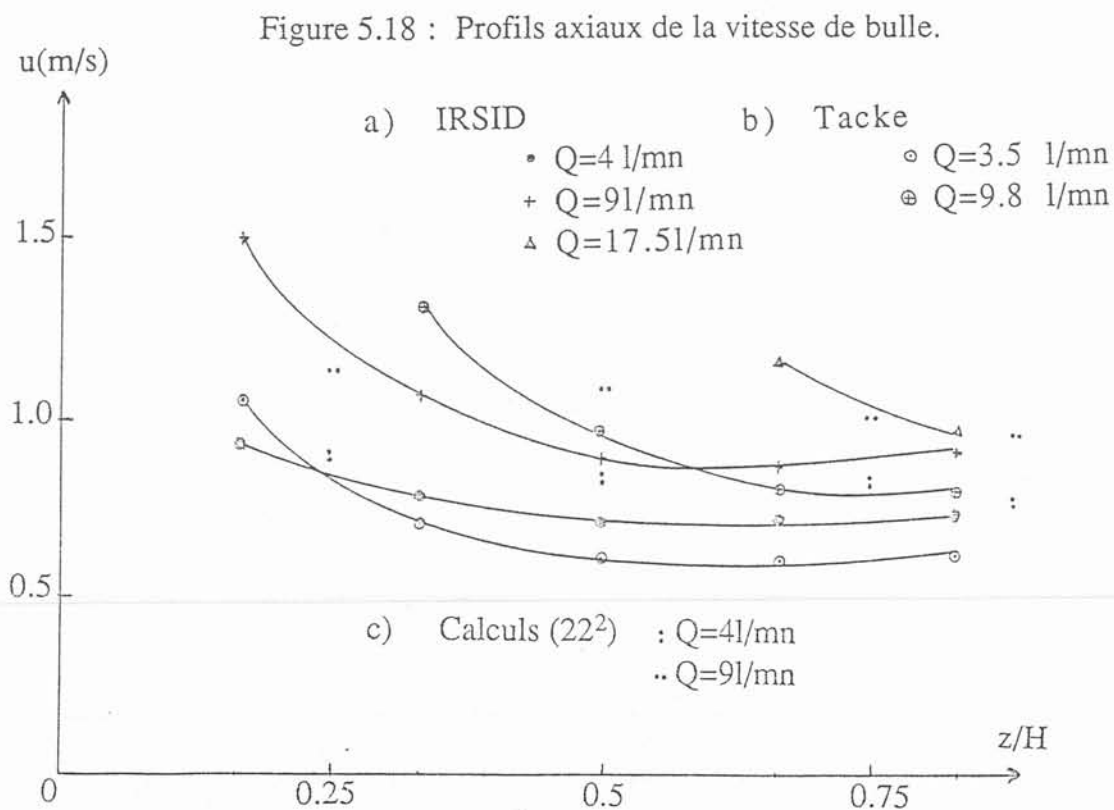
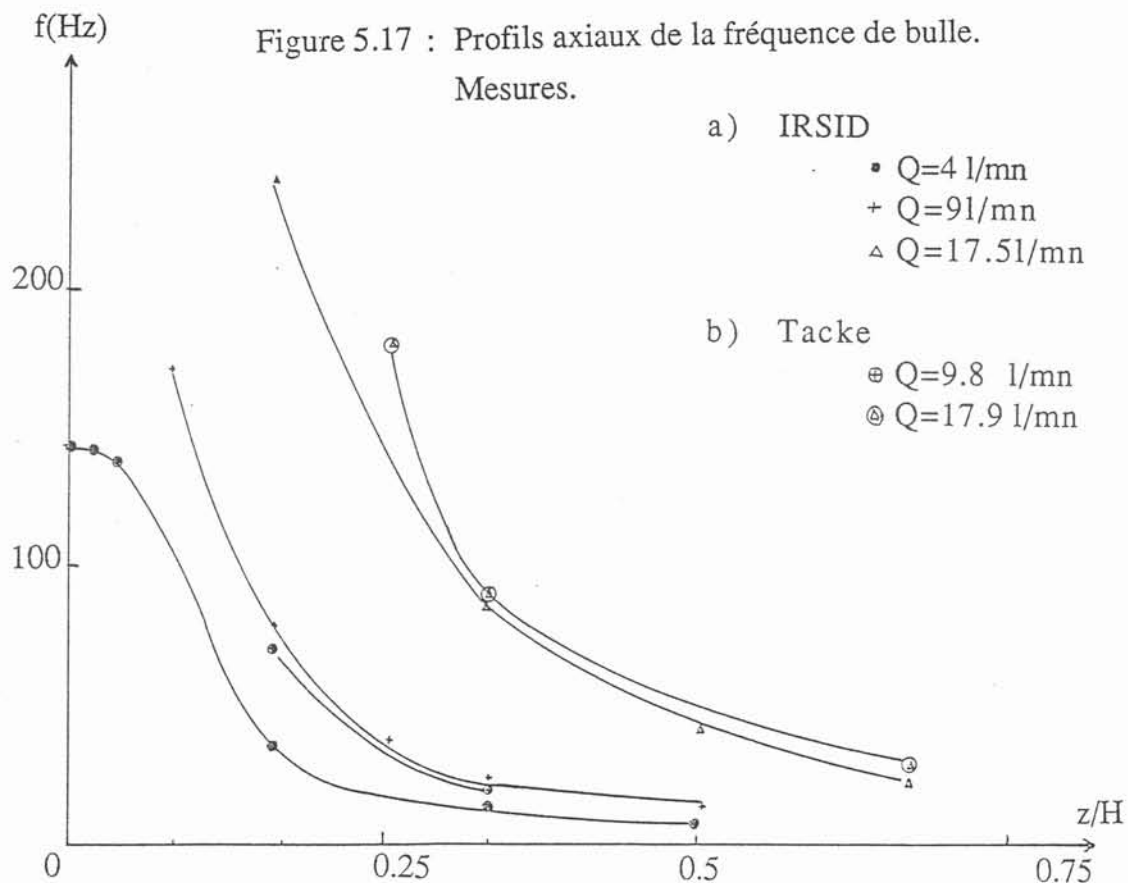
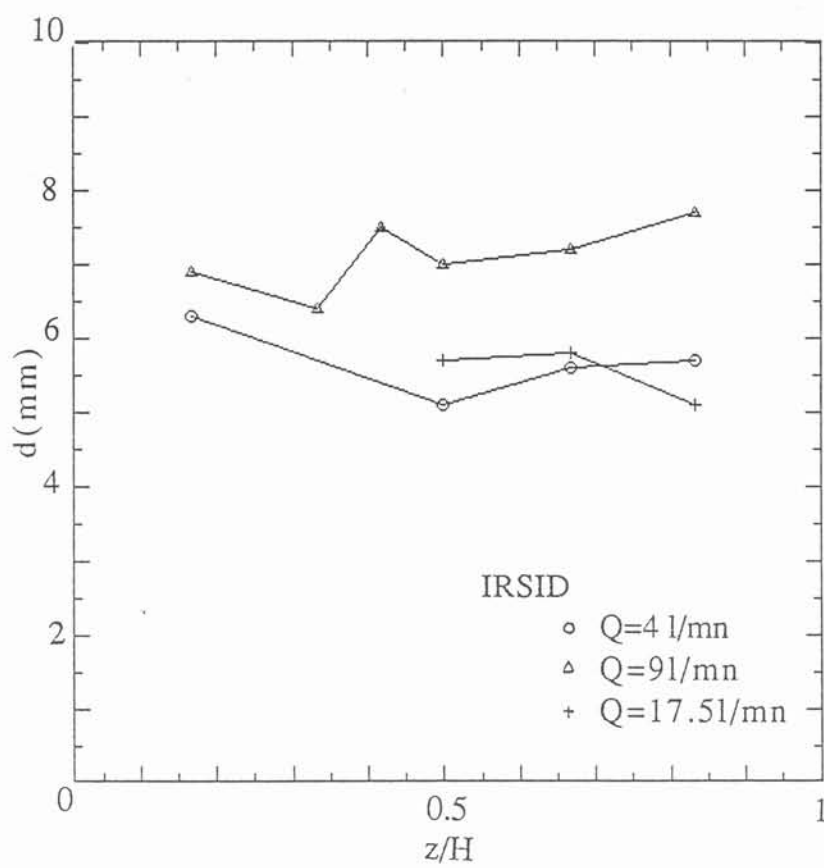


Figure 5.19: Profil axial de taille de bulle.  
Mesures.



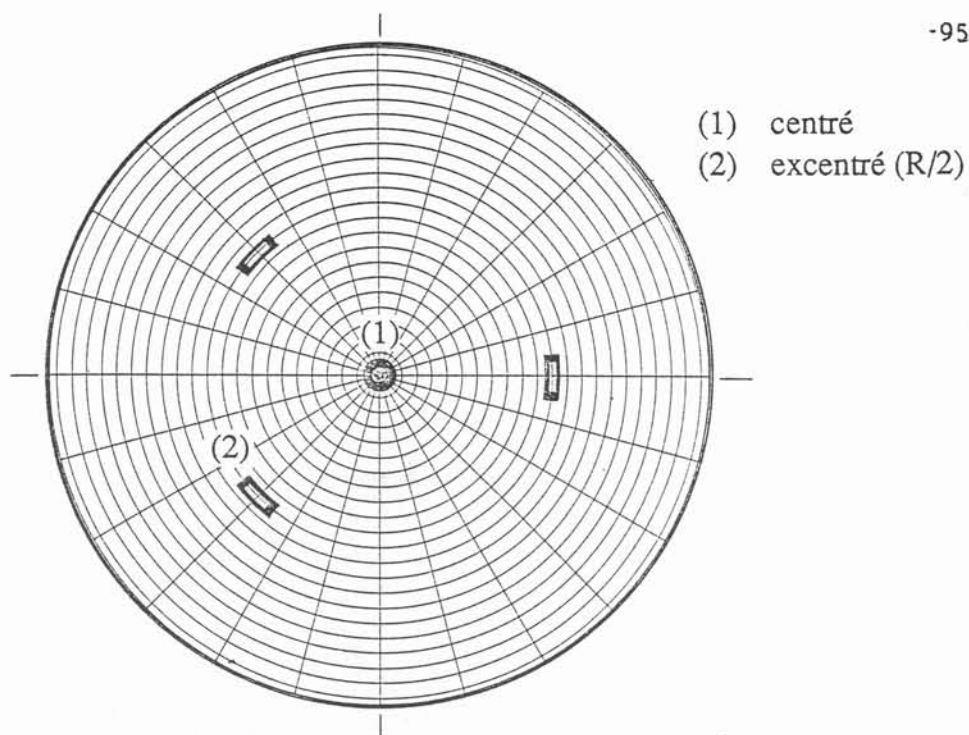


Figure 5.20 : a) Positions des injecteurs.

Figure 5.20 : b) Champ de vitesse expérimental.

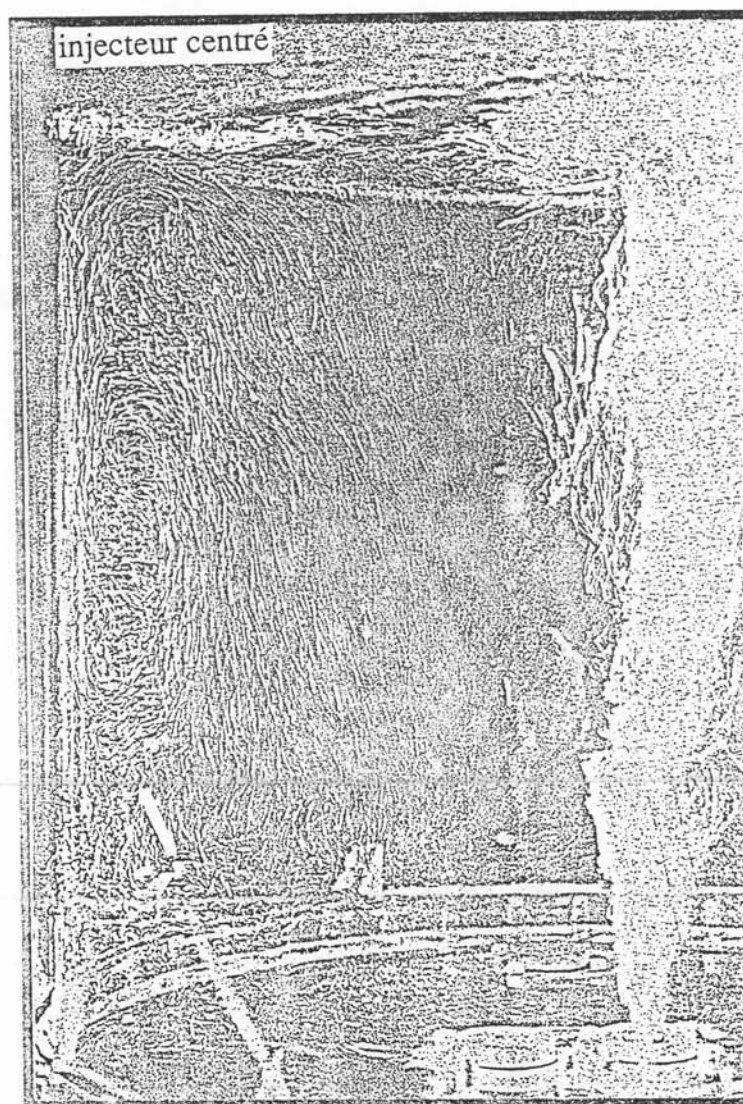


Figure 5.21 : a) Champ de vitesse calculé.

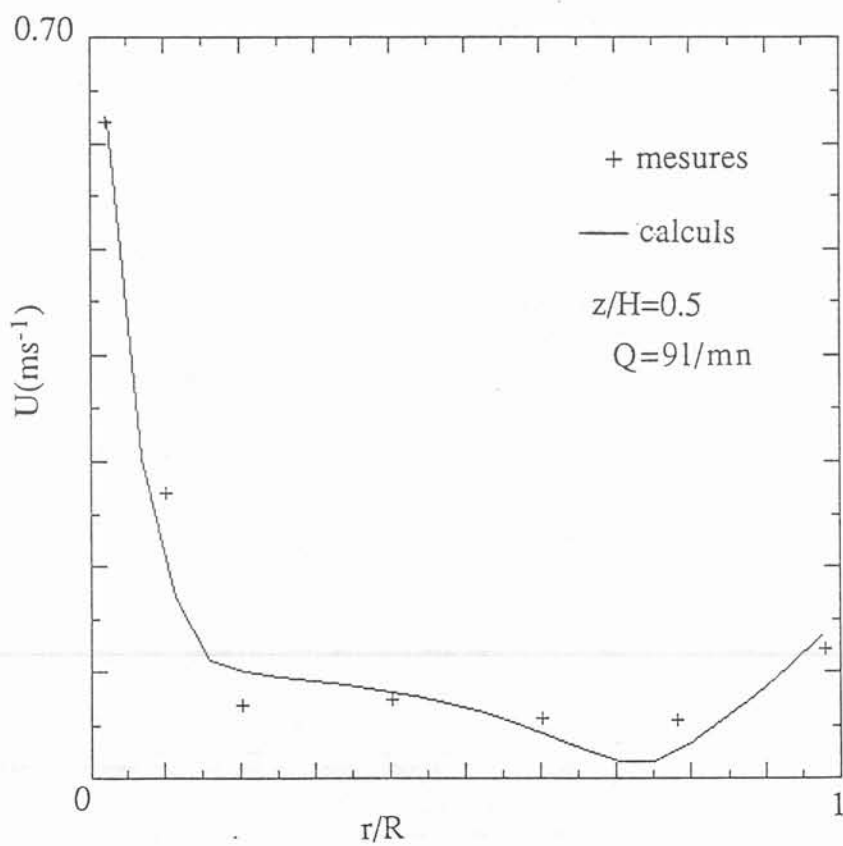
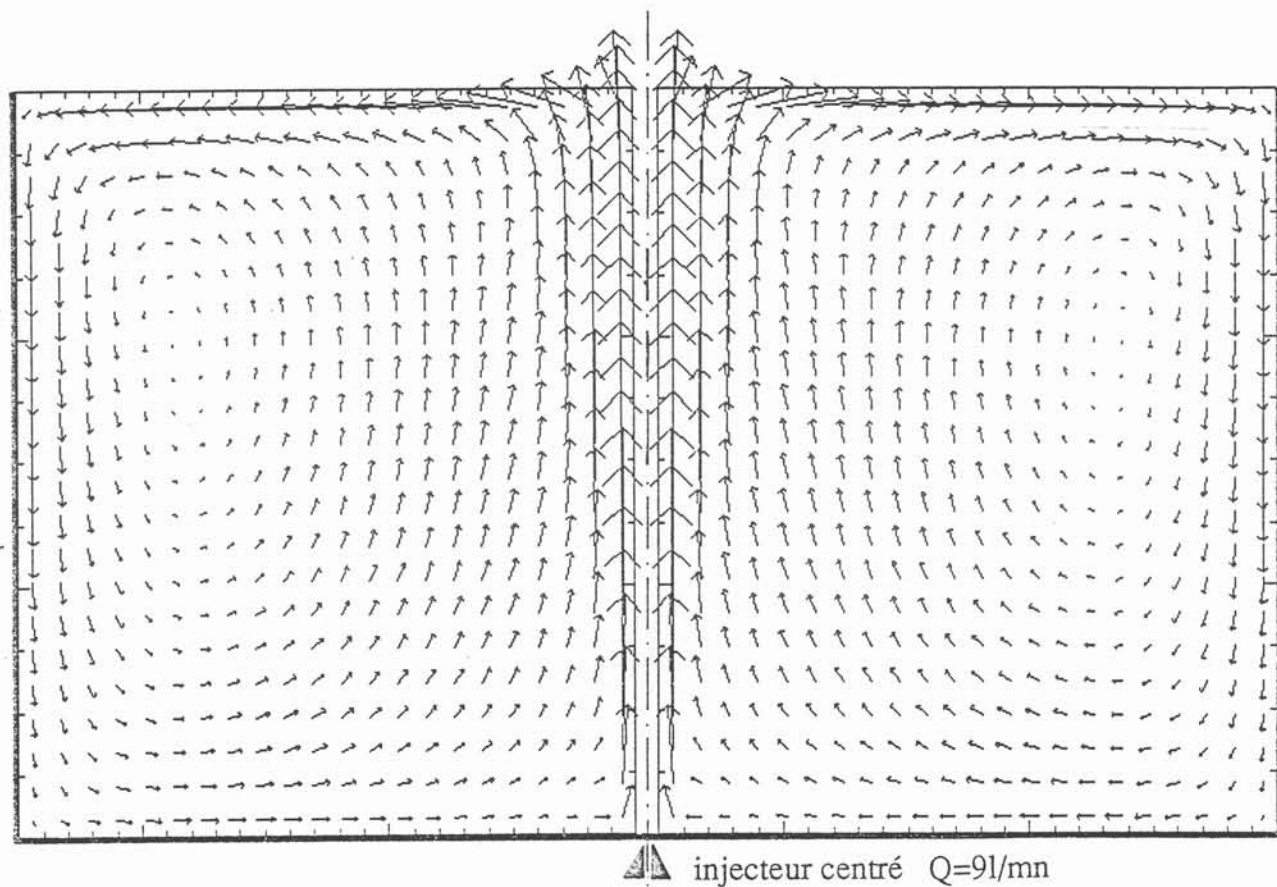


Figure 5.21 : b) Profil de module de vitesse.

Nous montrons les champs de vitesse obtenus en surface, dans le plan de symétrie et dans le plan diamétral perpendiculaire à celui-ci en figure 5.22.

Enfin, la caractérisation de l'écoulement en injection excentrée est complétée figure 5.23 par les tracés de lignes isovaleurs du taux de présence, de la pression et de l'énergie cinétique de la turbulence à la surface libre.

Le programme GALILAI nous a permis ensuite de prédire le brassage avec trois injecteurs excentrés et décalés de  $120^\circ$  (figure 5.20). Nous montrons le champ de vitesse obtenu en surface et dans les plans diamétraux contenant les injecteurs (figure 5.24). Ces résultats, à nouveau en désaccord avec ceux de Sawada, révèlent un important mouvement ascendant au centre de la cuve. Ont été également représentées les isovaleurs du taux de présence et de l'énergie cinétique de la turbulence à la surface libre (figure 5.25).

### 5.5.6) Relation vitesse liquide-débit gaz

La vitesse du liquide dans le panache et la vitesse recirculante varient avec le débit de gaz injecté, d'après le modèle, comme :

$$\begin{aligned} u_{\text{recir}} &\approx Q^{\alpha_{r1}} & \alpha_{r1} &= 0.37 \\ u_{\text{pana}} &\approx Q^{\alpha_{p1}} & \alpha_{p1} &= 0.45 \end{aligned}$$

Ces résultats sont en accord avec les résultats théoriques d'Asai /1.7,1.8/ qui prédit une pente de un tiers pour la vitesse recirculante.

### 5.5.7) Relation vitesse liquide-diamètre de bulle

Toujours avec la même configuration, nous examinons comment varie selon le modèle la vitesse du liquide à l'intérieur et à l'extérieur du panache avec le diamètre des bulles de gaz. Les simulations montrent que les vitesses du liquide varient comme :

$$\begin{aligned} u_{\text{recir}} &\approx d^{\alpha_{r2}} & \alpha_{r2} &= -0.12 \\ u_{\text{pana}} &\approx d^{\alpha_{p2}} & \alpha_{p2} &= -0.14 \end{aligned}$$

Ainsi la taille des bulles ne constitue pas un paramètre sensible pour le calcul de l'écoulement du liquide. Elle modifie par contre les vitesses du gaz de manière sensible. Les vitesses varient dans une gamme somme toute peu étendue quand nous passons d'un diamètre de 0.3 cm à 3 cm. Ce résultat semble donc très intéressant car il ne remet pas en cause la validité du modèle quant à la prédiction des mouvements du liquide.

### 5.5.8) Turbulence

La connaissance de l'agitation, c'est à dire de l'intensité de la turbulence à proximité de l'interface métal-laitier, est de prime importance en matière de transfert de masse.

La comparaison mesure-calcul de l'énergie cinétique de la turbulence, réalisée uniquement à l'extérieur du panache est satisfaisante dans le cas d'une injection

Figure 5.22: a) Champ de vitesse calculé en surface  
(injecteur excentré).

$$Q = 8 \text{ l/mn}$$

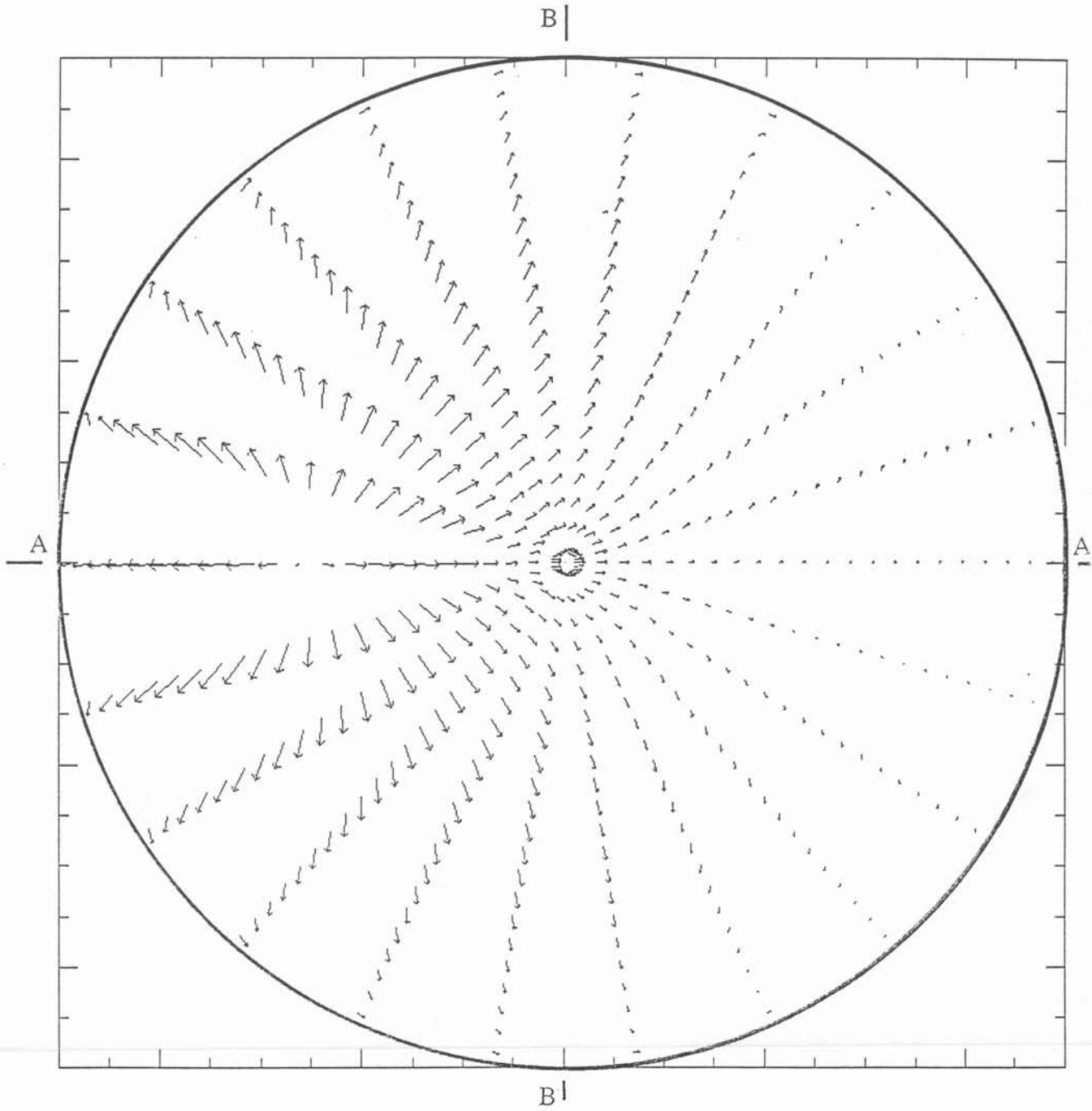




Figure 5.22 : b) Champ de vitesse calculé : coupe AA.

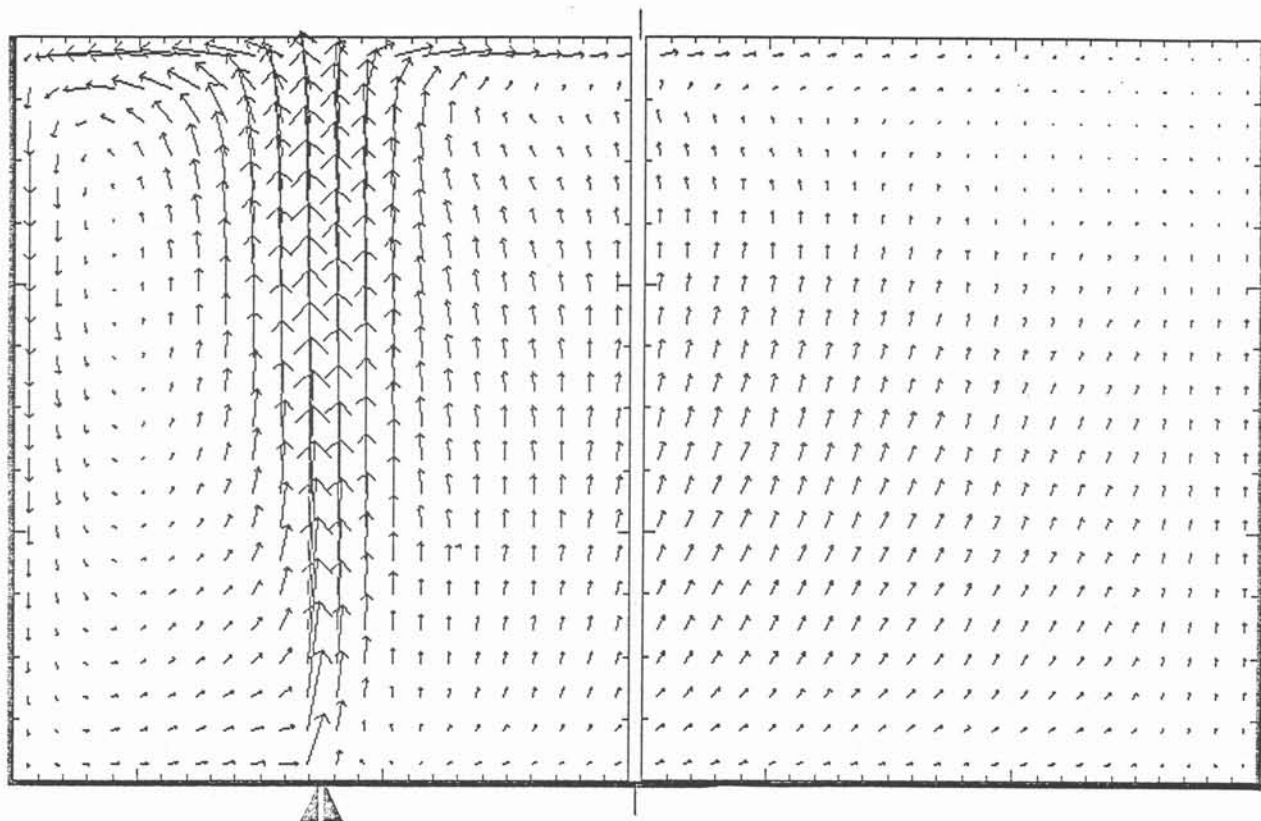
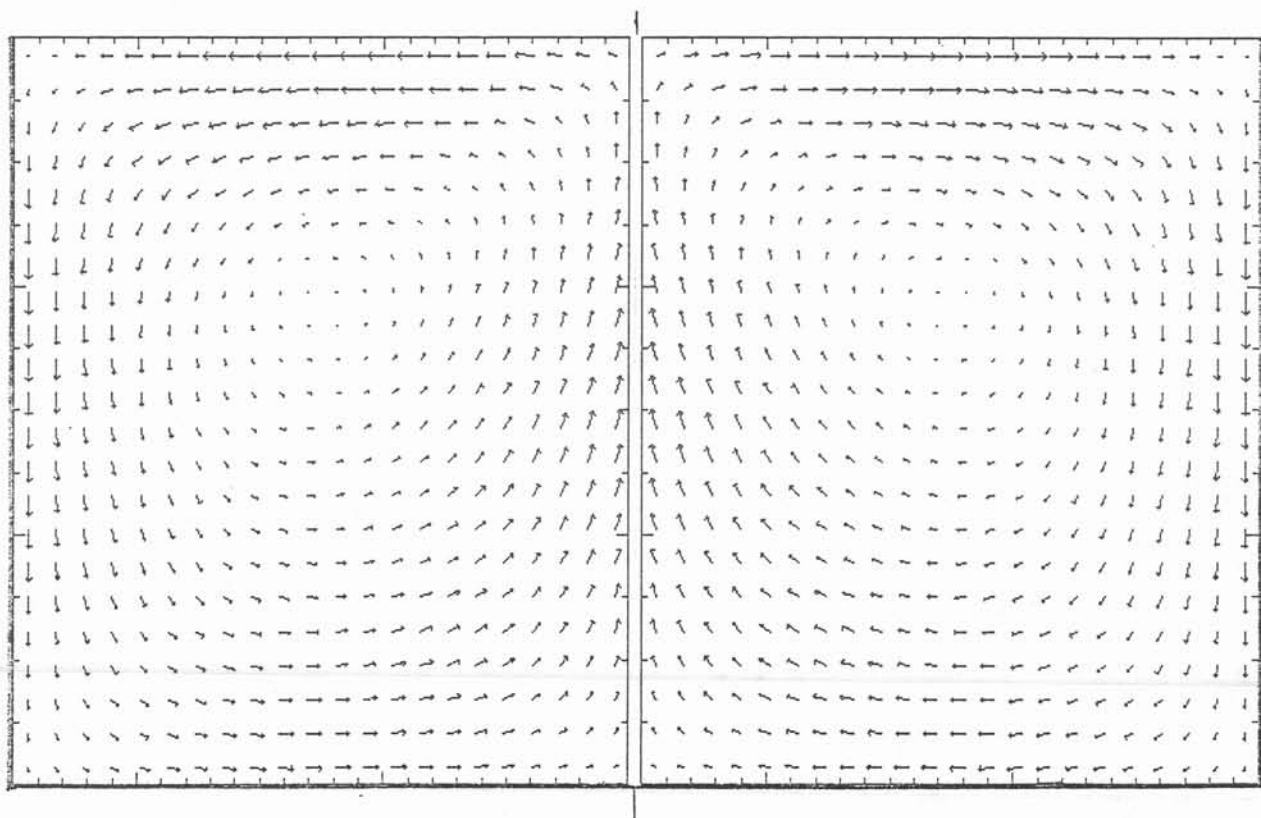


Figure 5.22 : c) Champ de vitesse calculé : coupe BB.





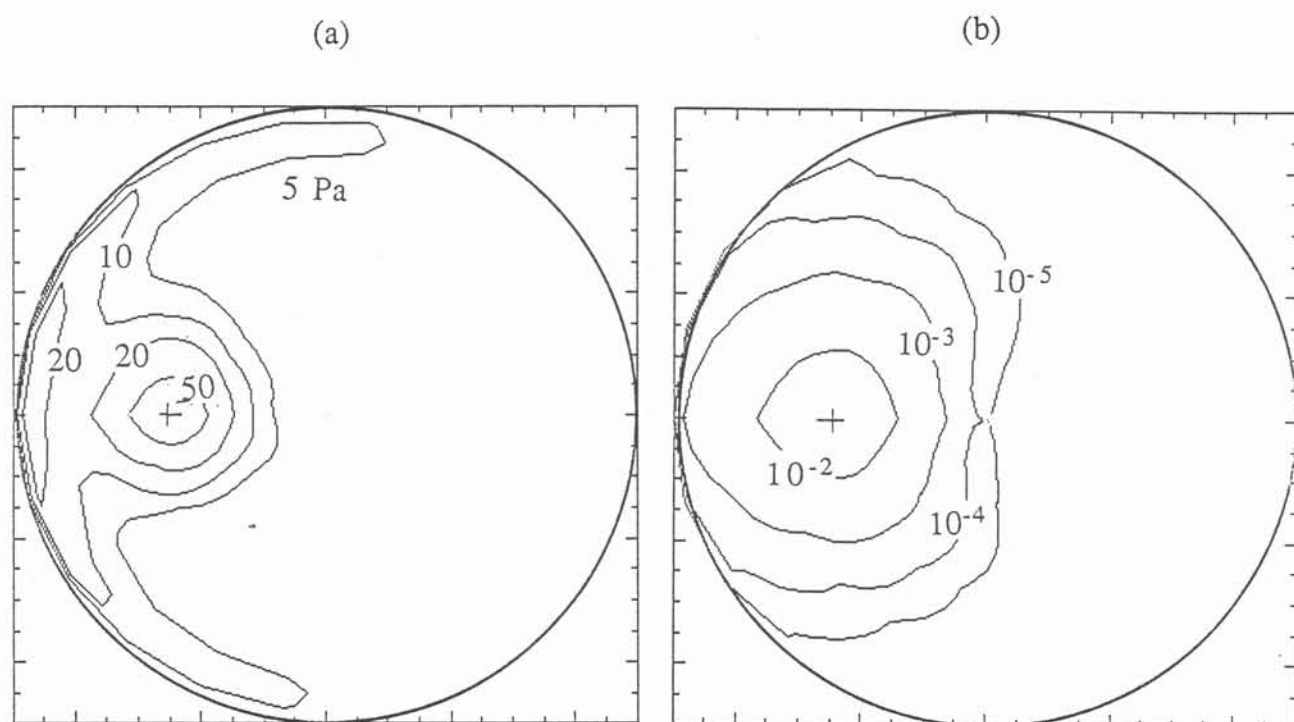


Figure 5.23 : Isovaleurs en surface :  $Q=9\text{l/mn}$

a) Pression.

b) Taux de présence.

c) Energie cinétique de la turbulence.

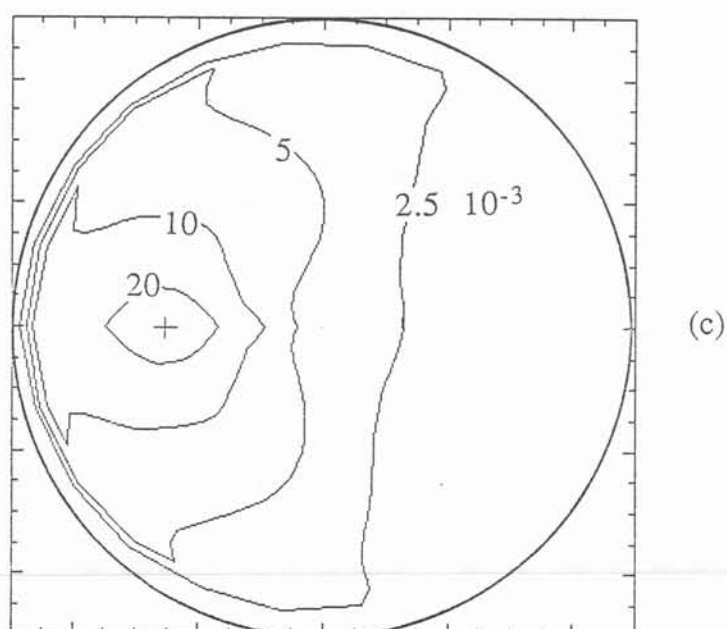


Figure 5.24 : a) Champ de vitesse calculé en surface  
(3 injecteurs).

$$Q = 3 \times 8 \text{ l/mn}$$

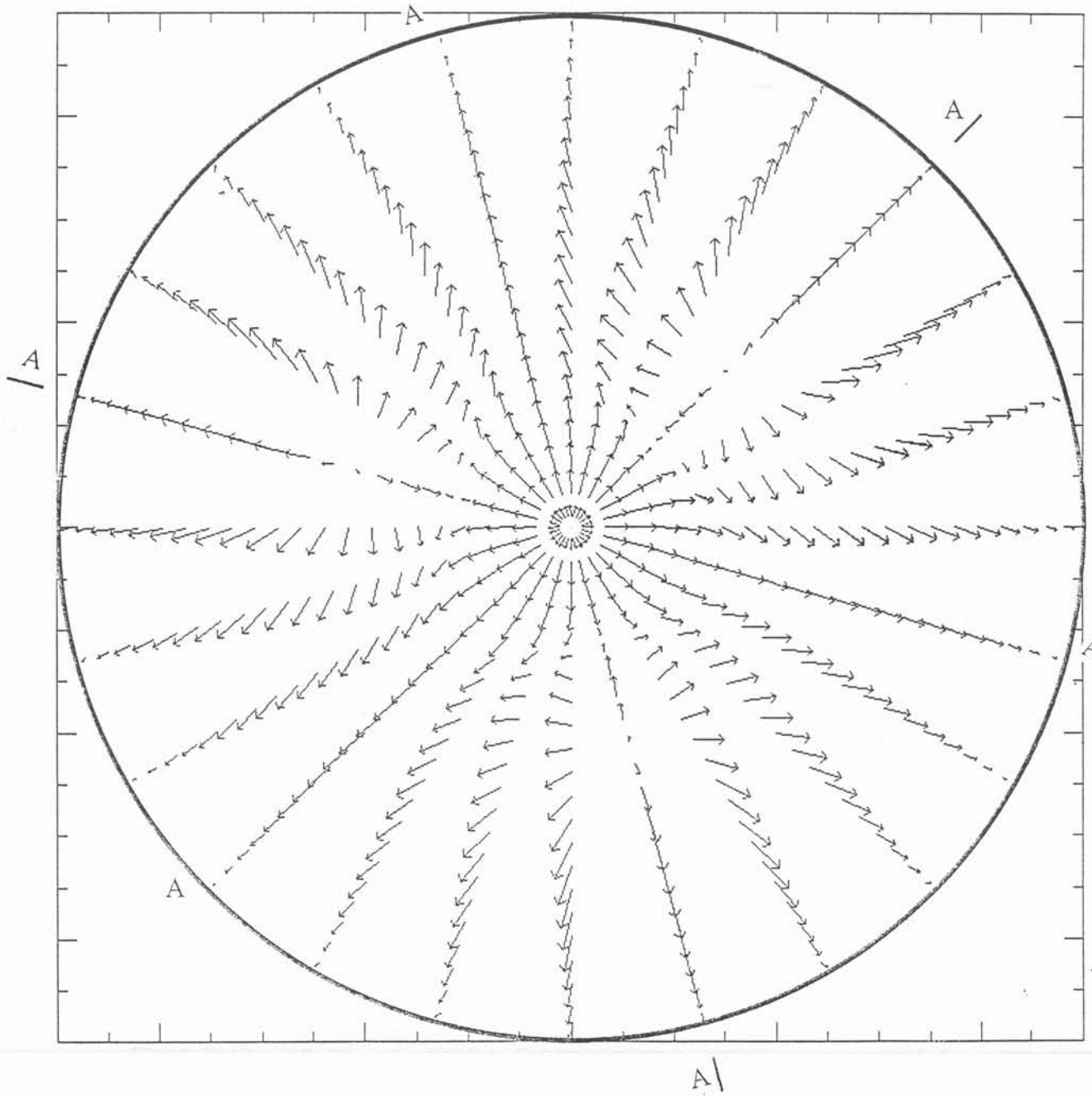


Figure 5.24 : b) Champ de vitesse calculé : coupe AA.

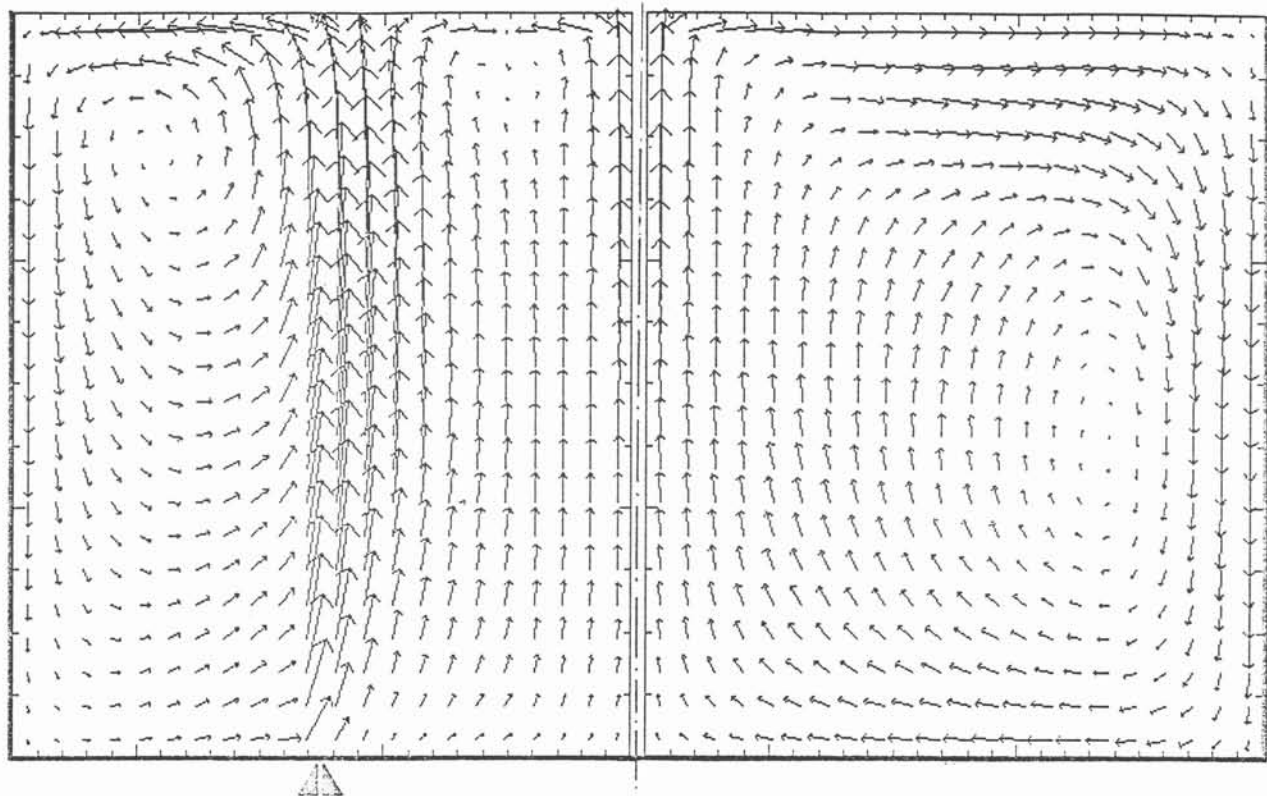
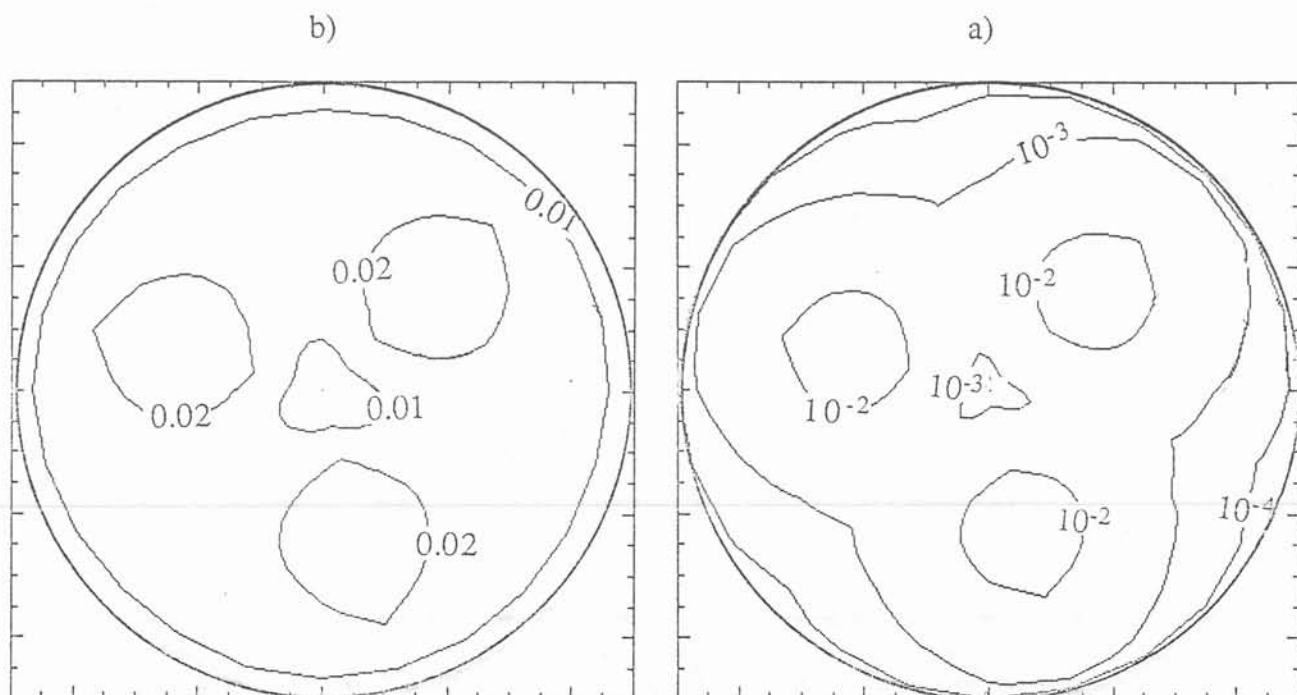


Figure 5.25 : Isovaleurs en surface :  
a) Taux de présence.  
b) Energie cinétique de la turbulence.



centrée. Il ressort des mesures que l'énergie cinétique de la turbulence  $k$  et son taux de dissipation  $\epsilon$  sont maximum dans le panache et dans le dôme.

Les variations du taux de fluctuation avec le débit sont présentées figure 5.26. De même, les variations du coefficient d'échange  $h_m$  avec le débit sont présentées figure 5.27. D'après Davies /1.25/, ce coefficient s'écrit :

$$h_m = 0.32 \delta \left( \frac{D\rho}{\gamma} \right)^{1/2} u_*^{3/2} \quad (5.9)$$

avec

|          |   |
|----------|---|
| $\delta$ | coefficient fonction de la turbulence dans le laitier,    |
| $D$      | coefficient de diffusion de l'espèce chimique considérée, |
| $\rho$   | masse volumique du liquide,                               |
| $\gamma$ | tension interfaciale métal-laitier,                       |
| $u_*$    | vitesse de frottement interfaciale.                       |

Nous pouvons remarquer que :

le décentrage de l'injection entraîne une diminution du coefficient d'échange,

l'utilisation de plusieurs injecteurs excentrés, à un débit donné, n'apporte aucune amélioration de ce coefficient d'échange,

les constantes  $C_k$  et  $C_\epsilon$ , au contraire modifient sensiblement la turbulence à la surface libre.

### 5.5.9) Spectre d'énergie

A l'extérieur du panache, les spectres d'énergie mesurés dans le liquide ont une forme classique. Nous retrouvons bien une zone inertielle avec une pente en  $k^{-1}$  (voir figure 5.28). Dans le panache, la présence de la deuxième phase se traduit de la manière suivante:

- le spectre est plus étendu vers les petites échelles, c'est à dire que la dissipation est plus importante,
- l'énergie semble également répartie dans la zone 1 du spectre (spectre plat),
- la caractérisation de la zone inertielle est différente de celle d'un écoulement simple : le spectre tend vers un spectre en  $k^{-2.5}$  au fur et à mesure que nous nous rapprochons du panache /1.22/.

Mais nous pouvons observer dans une grande partie du bain qu'une ou plusieurs fréquences ressortent (figure 5.29). Elles constituent une source d'énergie pour le système. Ces fréquences sont liées à l'excitation de la surface libre ou interface métal-laitier (eau-huile) par le jet de bulles de gaz (voir §5.5.10). Quel que soit le débit, une fréquence caractéristique ( $f=2$  hertz environ) apparaît partout dans le bain, rendant très délicate toute mesure par double sonde (intercorrélation des deux signaux). Quand l'injection est excentrée, plusieurs fréquences sont mêmes visibles.

Figure 5.26 : Intensité de la turbulence en surface.

-104-

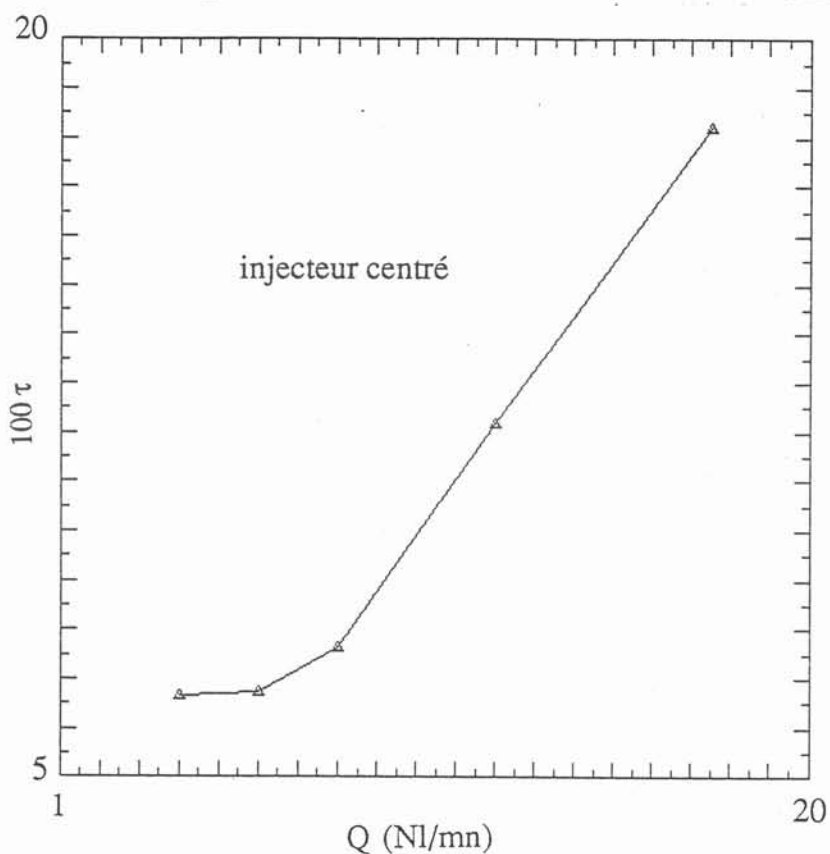


Figure 5.27 : Coefficient d'échange:  $h_m = 0.32 \delta \left( \frac{D\rho}{\gamma} \right)^{1/2} u_*^{3/2}$

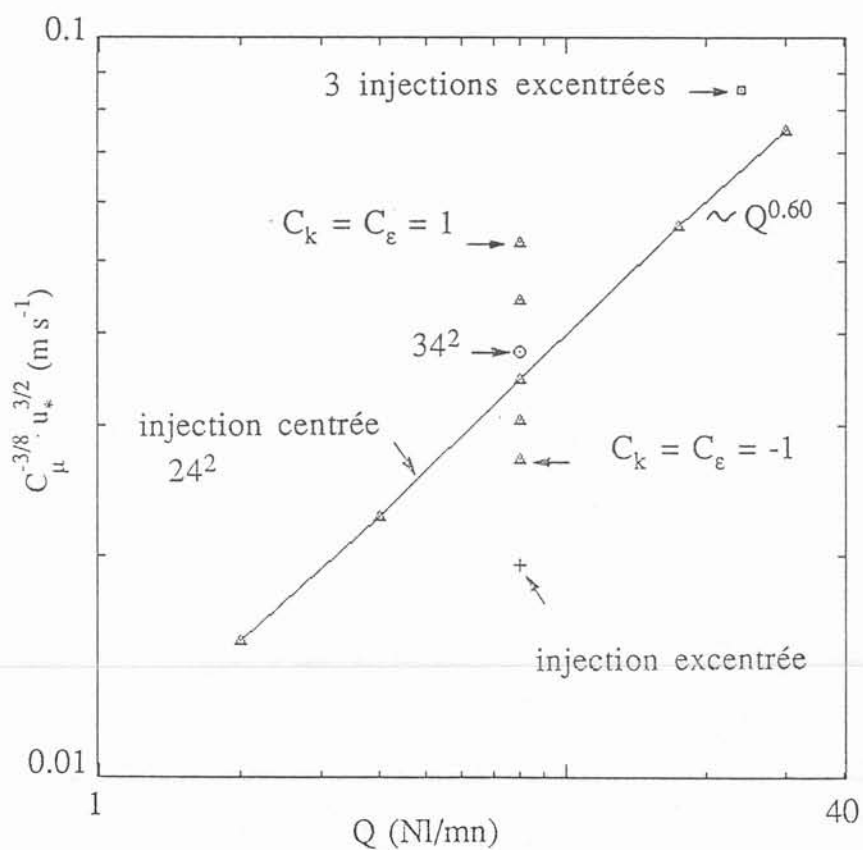


Figure 5.28 : a) Spectre d'énergie au fond de la cuve.  
(injecteur centré :  $Q = 8 \text{ l/mn}$ )

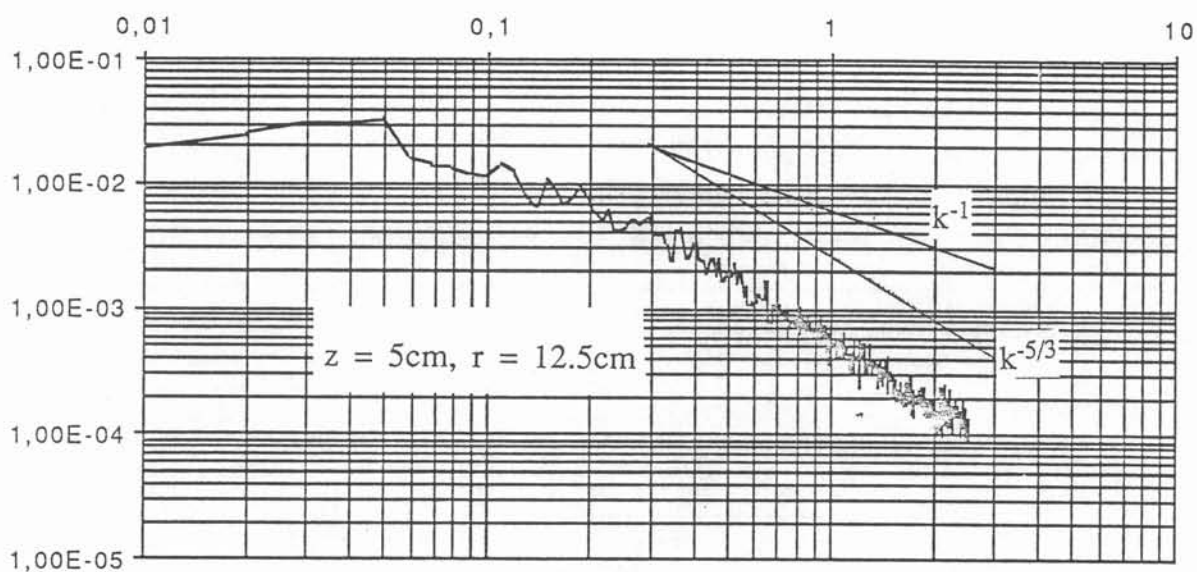


Figure 5.28 : b) Spectre d'énergie près du panache.  
(injecteur centré :  $Q = 8 \text{ l/mn}$ )

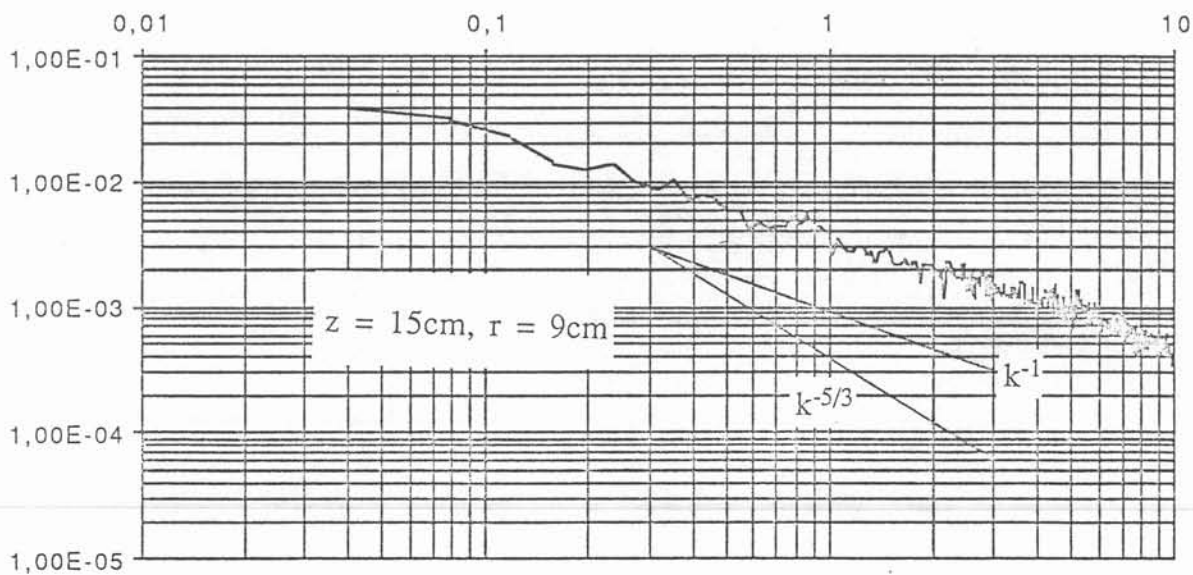


Figure 5.29 : a) Spectre d'énergie près de la surface.  
(injecteur centré :  $Q = 8 \text{ l/mn}$ )

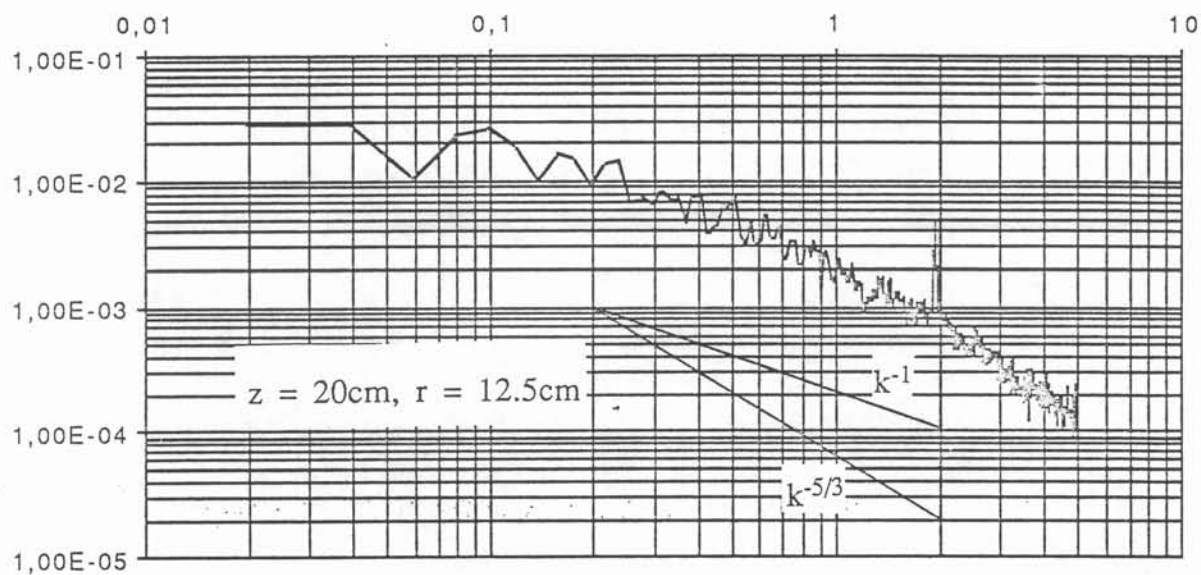
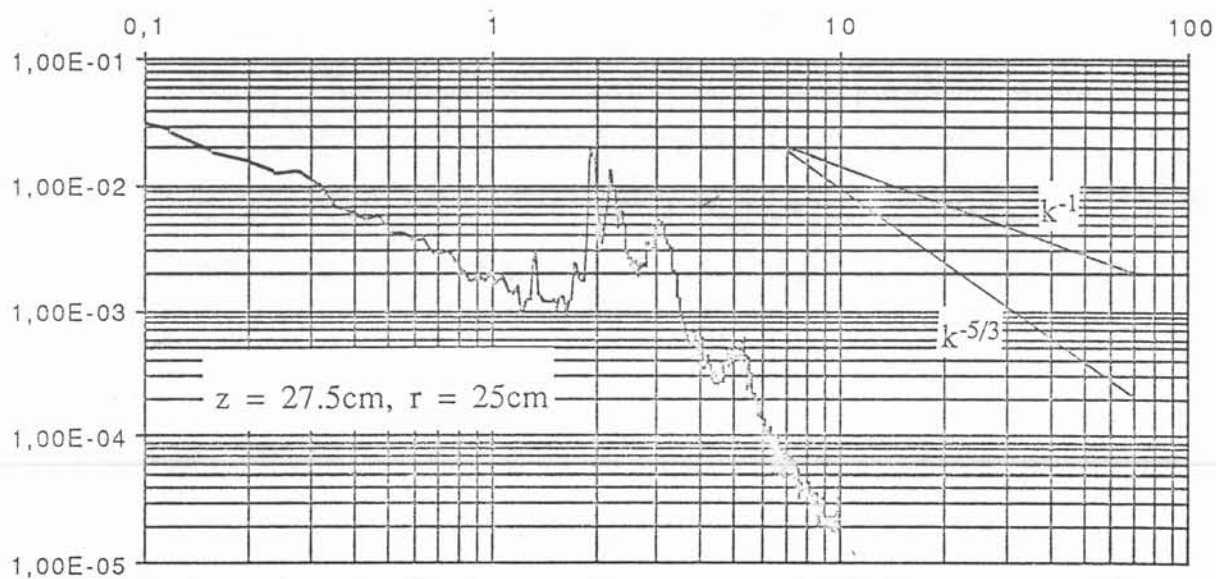


Figure 5.29 : b) Spectre d'énergie près de la surface.  
(injecteur excentré :  $Q = 8 \text{ l/mn}$ )



Enfin les mesures d'échelles caractéristiques de la turbulence ont montré que l'échelle intégrale diminue quand le débit de gaz injecté augmente ou quand le point de mesure se rapproche du panache. Il est d'ailleurs très simple de montrer que la taille  $l$  des tourbillons énergétiques est une fonction décroissante du taux de présence du gaz :

$$l = d \frac{U_1}{U_g} \frac{1 - \alpha}{\alpha} \quad (5.10)$$

et donc du débit car le taux de présence varie comme la racine carrée du débit (§5.5.1).

### 5.5.10) Déformation de la surface libre

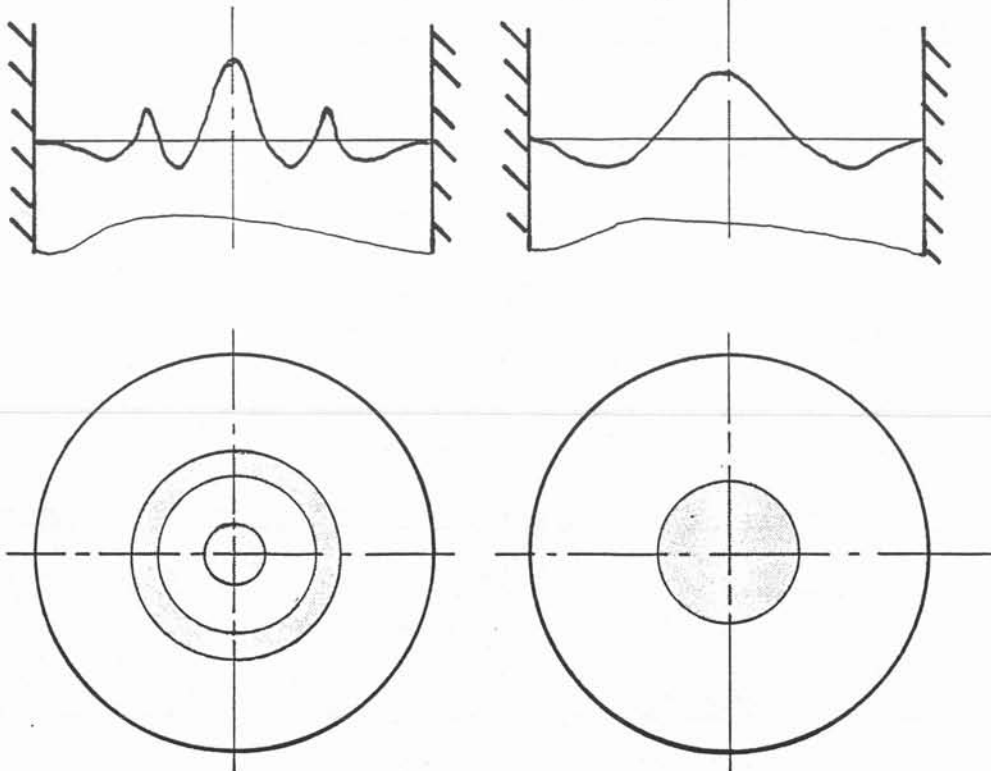
D'une façon générale, il est possible d'exprimer la hauteur de la surface libre comme une fonction de la position ( $r, \theta$ ) et du temps  $t$  suivant une loi /5.9/ :

$$\eta(r, \theta, \tau) = \sum_{p, m} f(t) \cos p\theta J_p(k_{m,p} r) \quad (5.11)$$

avec

- $h$  hauteur de la surface libre,
- $r$  rayon,
- $\theta$  angle,
- $t$  temps,
- $f(t)$  fonction d'excitation imposée par l'extérieur,
- $p$  mode orthoradial,
- $k_{m,p}$  mode radial, zéro de dérivée de la fonction de Bessel  $J_p$ .

Les oscillations libres de la surface sont caractérisées par les modes  $(p,m)$  où le paramètre  $p$  mesure "l'axisymétrie" de la vibration alors que  $m$  mesure la déformation radiale de la surface libre. Afin d'éclairer ceci, le schéma ci-dessous montre deux modes de vibration d'un mode de déformation axisymétrique ( $p=0$ ) :





Dans le cas d'une injection centrée, les mesures ne révèlent aucune dépendance de la coordonnée orthoradiale  $\theta$  sur la déformation de la surface libre. Ainsi, la surface libre se caractérise par un couple  $(0, m)$ . Les cinq premières fréquences propres de vibration de notre cuve ( $R=0.25$  m et  $H=0.30$  m) sont les suivantes :

| k     | f    |
|-------|------|
| 3.83  | 1.95 |
| 7.02  | 2.64 |
| 10.17 | 3.18 |
| 13.32 | 3.64 |
| 16.47 | 4.05 |

Celles-ci se calculent en utilisant l'expression :

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad \omega_i = \lambda_i g \operatorname{th}(\lambda_i H) \quad \lambda_i = \frac{k_i}{R} \quad (5.12)$$

avec

f fréquence propre,  
 $\omega$  pulsation propre,  
 $\lambda$  paramètre.

Analysons l'origine de l'excitation de la surface libre. Elle est double :

- les bulles elles-mêmes qui traversent la surface libre, avec une fréquence de l'ordre de la dizaine de hertz. Mais ce phénomène reste limité en intensité et ne peut expliquer les observations.

- les paquets intermittents de bulles (figure 5.30), décelables par observation avec une caméra à vitesse rapide, dont la fréquence caractéristique est de l'ordre du hertz.

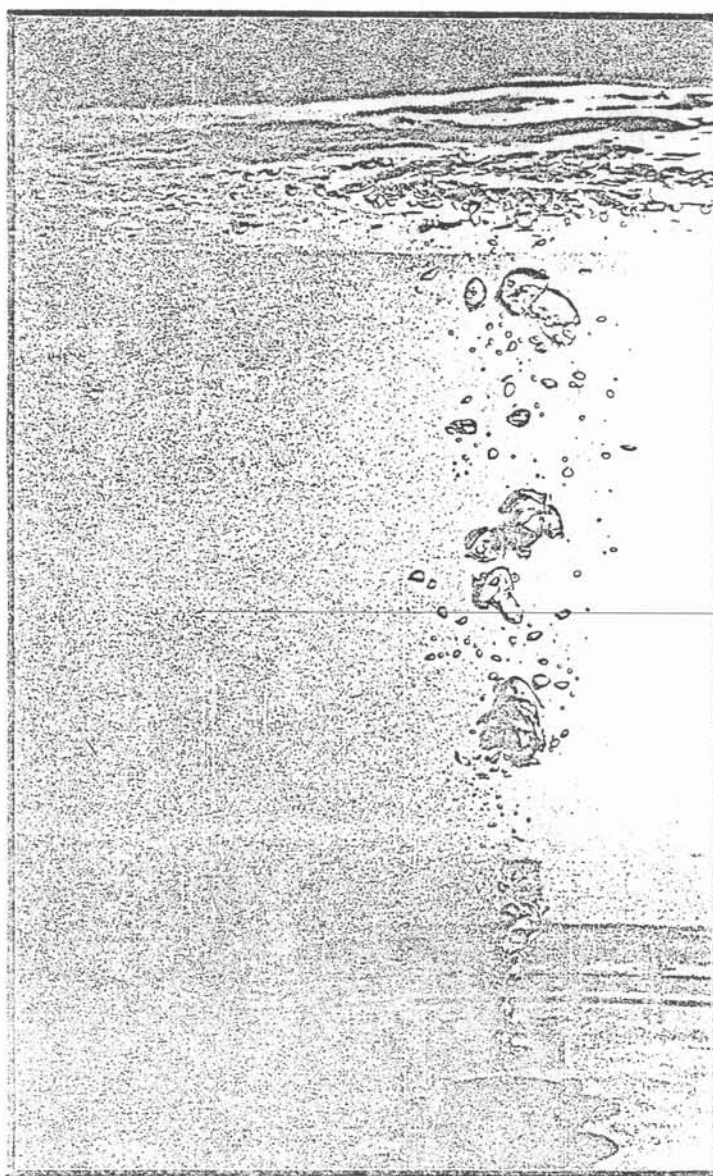
Ainsi cette deuxième constatation semble être en mesure d'expliquer l'observation d'une basse fréquence de l'ordre de 2 hertz, qui n'est rien d'autre que la fréquence propre de la cuve la plus proche de la fréquence d'excitation.

### 5.5.11) Intermittence, oscillation et instabilité du jet de gaz

La figure 5.30 suffit à démontrer l'intermittence du jet de gaz. Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que ce phénomène est à l'origine de la résonance de la surface libre de la cuve. Mais alors que cet effet reste en principe localisé près de l'interface métal-laitier, une instabilité beaucoup plus intéressante encore a été mise en évidence. Partons d'une hauteur d'eau  $H$  dans la cuve donnée et d'un débit de gaz initial très faible. Au fur et à mesure que nous augmentons la valeur du débit de gaz, plusieurs régimes de fonctionnement apparaissent :

- (1) bubbling (cf §1.1.1)
- (2) jetting
- (3) swirl le jet de gaz se met à tourner sur lui-même,
- (4) précession le jet de gaz est animé d'un mouvement de rotation périodique autour de l'axe de symétrie de la cuve

Figure 5.30 : Lâcher de paquet de bulles.



|                |  |
|----------------|--|
|                | (injection centrée)  |
| ou translation | mouvement de battement périodique du jet de gaz dans le plan diamétral contenant l'injecteur (figure 5.31) |
|                | (injection excentrée) et mouvement de grande amplitude de la surface libre                                 |

Le premier résultat est que la fréquence de précession ou de battement du jet gazeux reste constante et égale à 2 hertz, en injection centrée ou excentrée, avec ou sans huile en surface. Cette fréquence est, rappelons-le, la première fréquence propre de la cuve. De plus, l'apparition de ce phénomène est indépendant du parcours suivi dans ce plan.

Plaçons-nous maintenant dans le plan (H/D, Q). Le régime (3) n'est pas systématiquement observé. Selon [5.7], qui préfère employer la puissance de brassage au rapport hauteur-diamètre comme l'ordonnée à la courbe, cette transition de régime d'écoulement du gaz correspond à une transition du régime de transfert dans le métal.

La transition (4) a été par contre clairement observée (voir figure 5.32). Elle est représentée par une droite dans le plan (H/D, Q). A titre indicatif, nous pouvons observer que la présence d'une couche d'huile, par son rôle stabilisant, augmente la valeur de la transition, mais ne modifie ce phénomène. Les observations montrent que cette transition doit correspondre également à une transition dans le régime de transfert de masse métal-laitier. Une étude plus systématique est en cours pour préciser les rôles de l'injecteur, de la cuve et envisager la transposition aux cuves réelles.

Il faut noter l'absence de comparaison avec des calculs dans ce cas. De tels calculs doivent en effet être effectués en régime transitoire et en trois dimensions.

### 5.5.12) Couche de laitier

Nous avons testé le modèle de transfert de quantité de mouvement métal-laitier (cf §4.2). Les répartitions de la hauteur de laitier, de la vitesse interfaciale eau-huile et du rayon critique avec les paramètres suivants sont présentées :

- masse initiale de laitier (figure 5.33),
- débit de gaz injecté (figure 5.34).

Notons que la surface libre est plane (dôme non calculé, malgré les tentatives). Les variations mesurées et calculées du rayon critique avec le débit sont représentées en figure 5.35. Cette comparaison appelle deux réflexions :

- le liquide est capable de repousser par frottement le laitier,
- l'écoulement liquide est peu modifié par la présence de la couche d'huile.

### 5.6) Perspectives

La concentration de la solution varie avec la lumière naturelle, c'est pourquoi il faut veiller à ne pas trop l'exposer.

Cette méthode de mesure de vitesse permet également d'obtenir des gradients pariétaux de vitesse. Nous insérons pour cela une sonde dans la paroi de manière à ce qu'elle affleure la surface. Le courant que nous pouvons mesurer est alors fonction du gradient de vitesse, donc de la contrainte de cisaillement. Cette méthode déjà utilisée [A5.4] pour l'étude des contraintes sur le fond de la cuve, pourrait servir dans l'étude

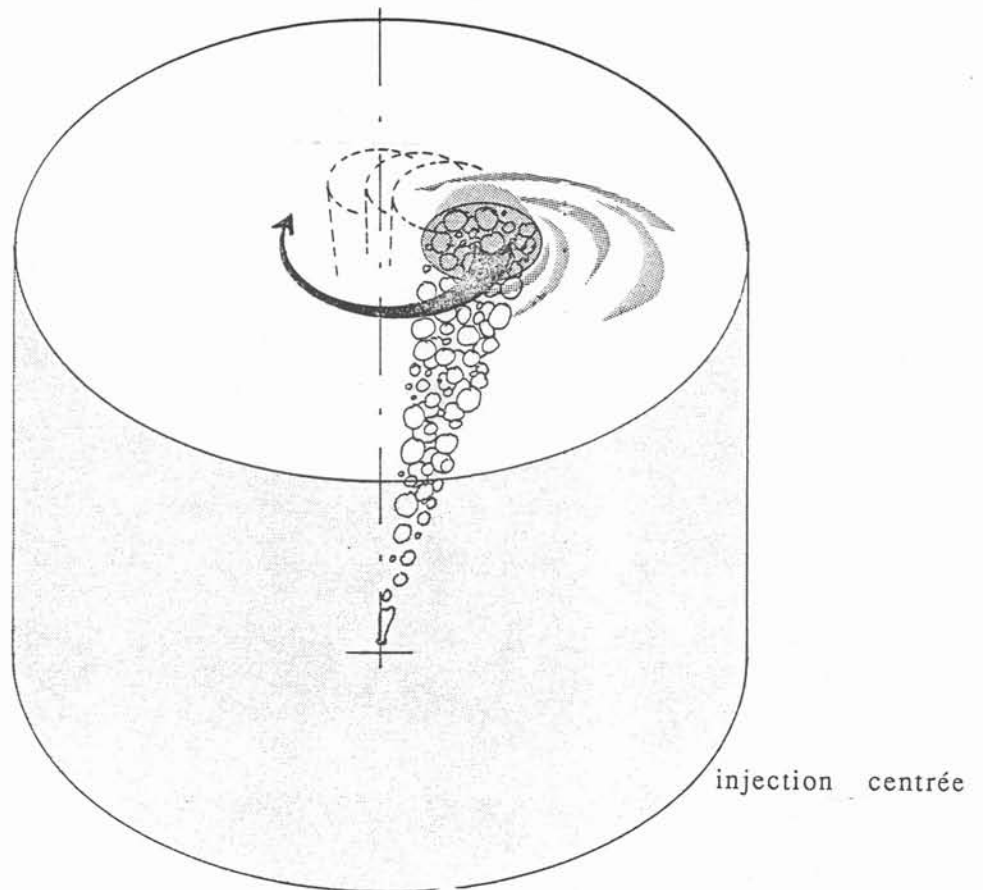


Figure 5.31 : Instabilité du jet gazeux.

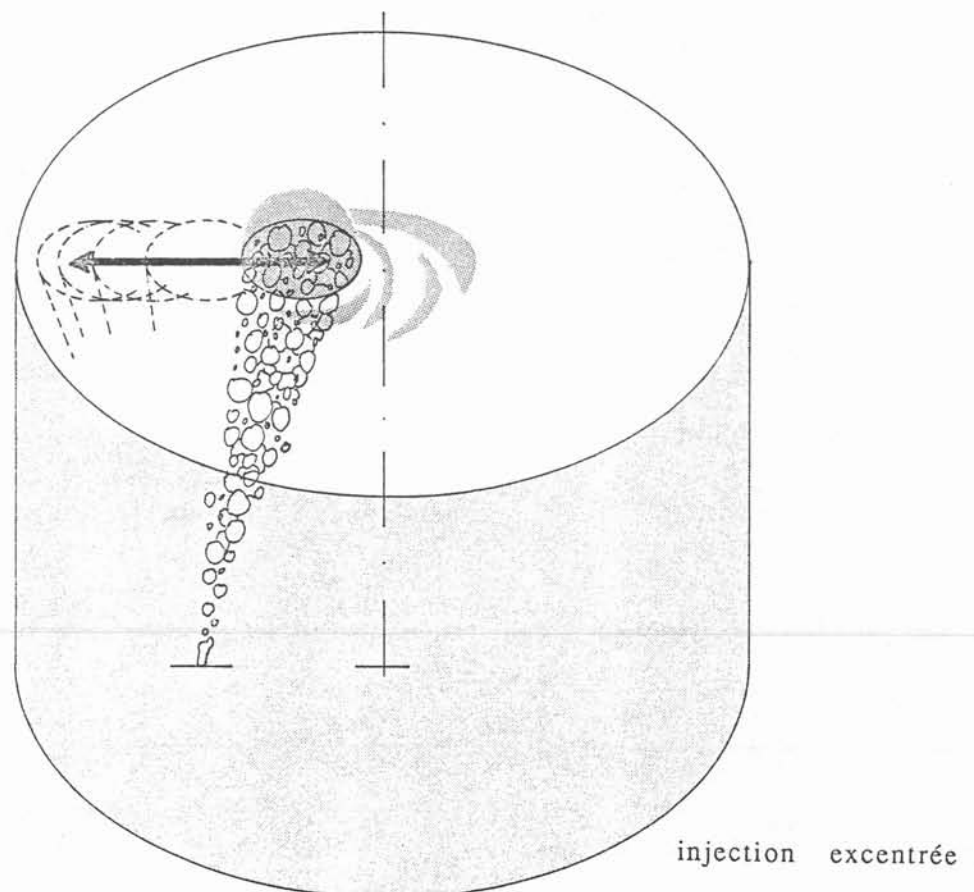
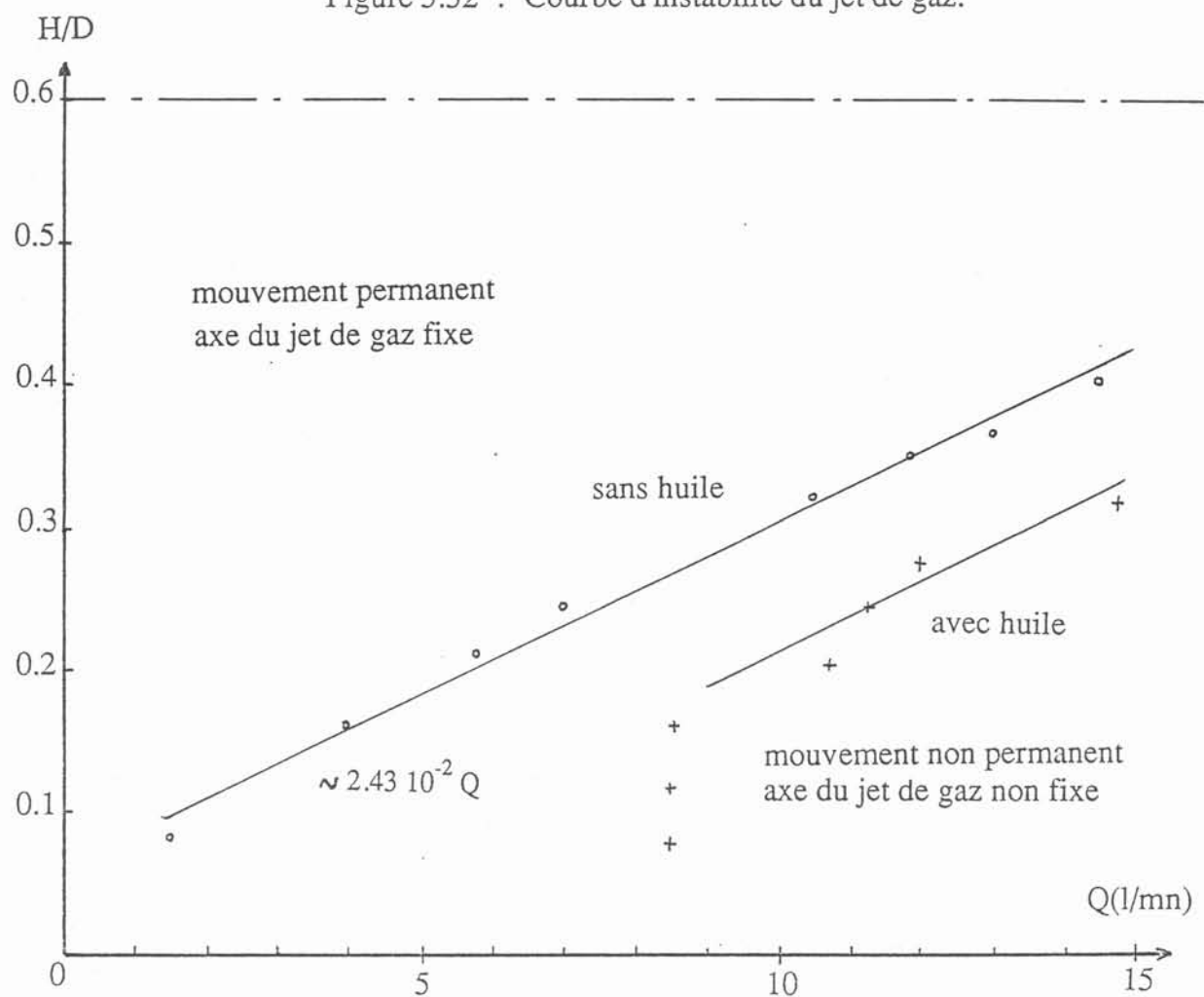


Figure 5.32 : Courbe d'instabilité du jet de gaz.



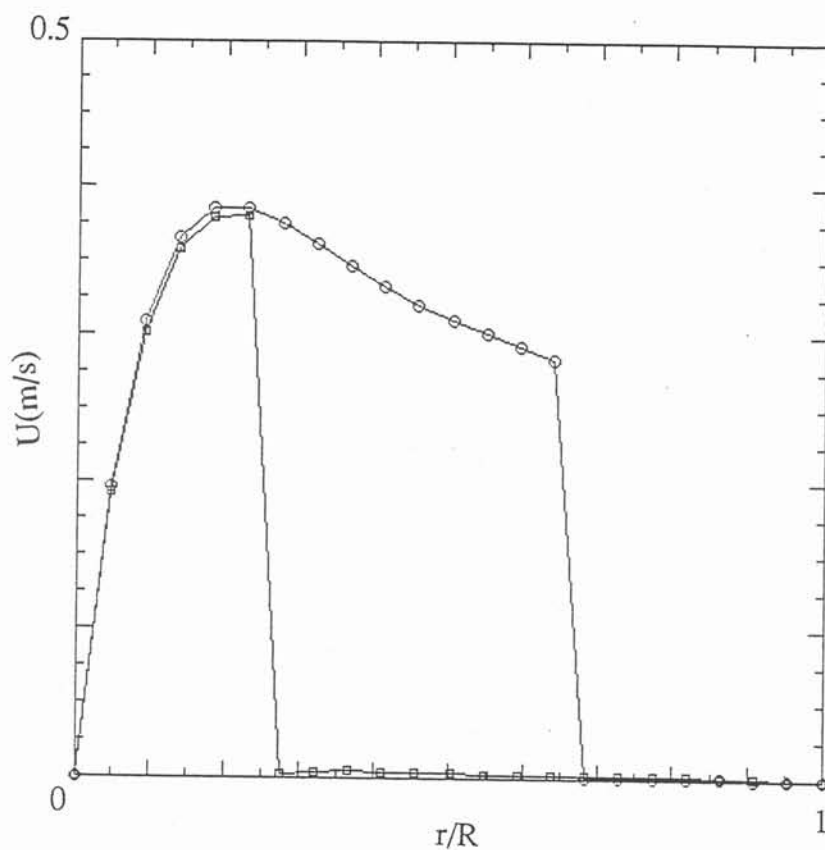


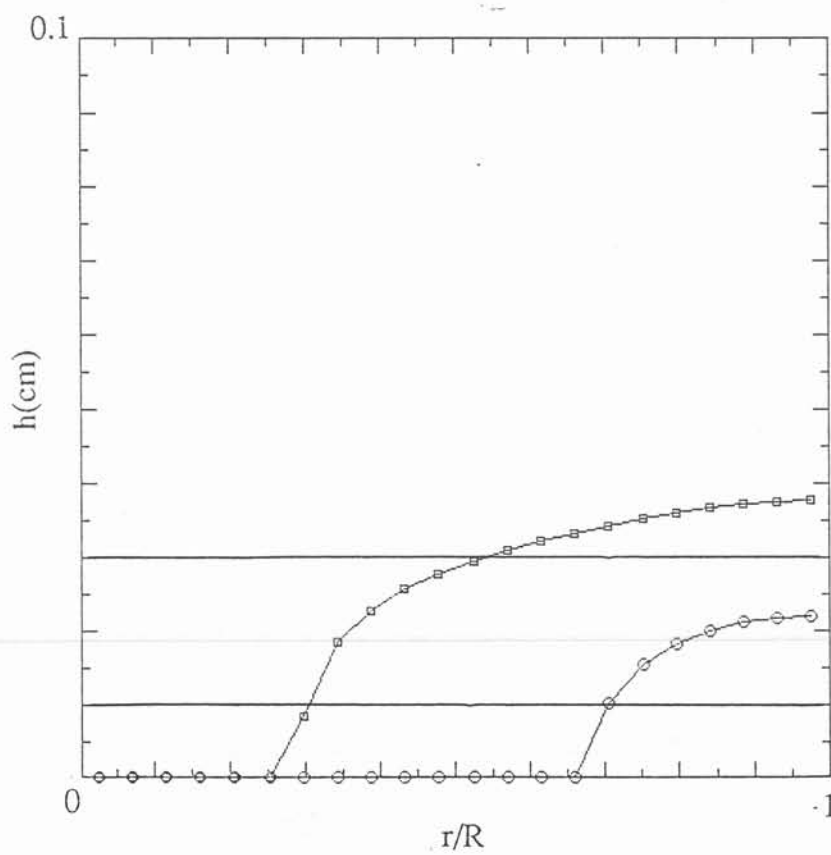
Figure 5.33 : Influence de la hauteur de laitier initiale sur les profils de vitesse et de hauteur de laitier.

$\mu=10^{-1}\text{PI}$

$Q=17.51/\text{mn}$

○  $h_0=1\text{mm}$

□  $h_0=3\text{mm}$



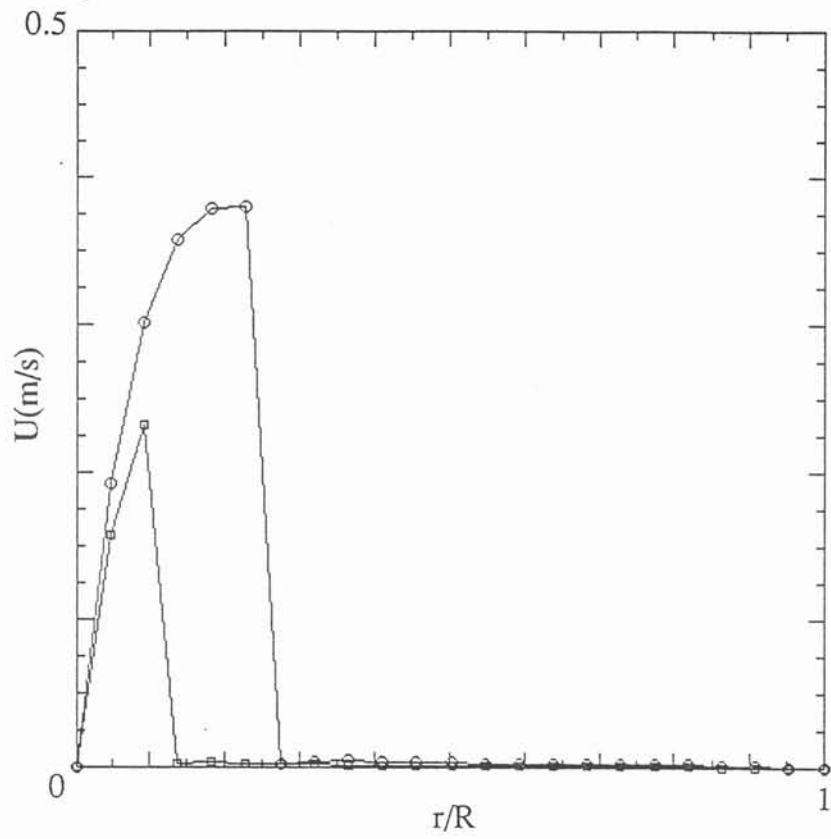


Figure 5.34 : Influence du débit de gaz sur les profils de vitesse et de hauteur de laitier.

$h_0=3\text{ mm}$   
 $\mu=10^{-1}\text{ Pl}$   
 $\square Q=8\text{ l/mn}$   
 $\circ Q=17.5\text{ l/mn}$

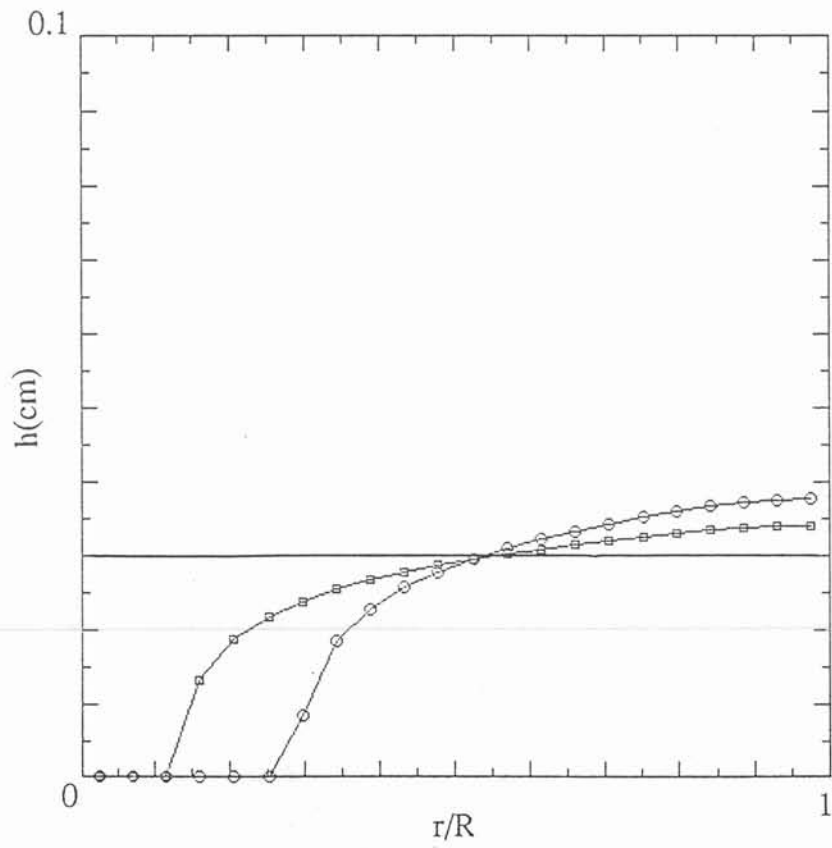
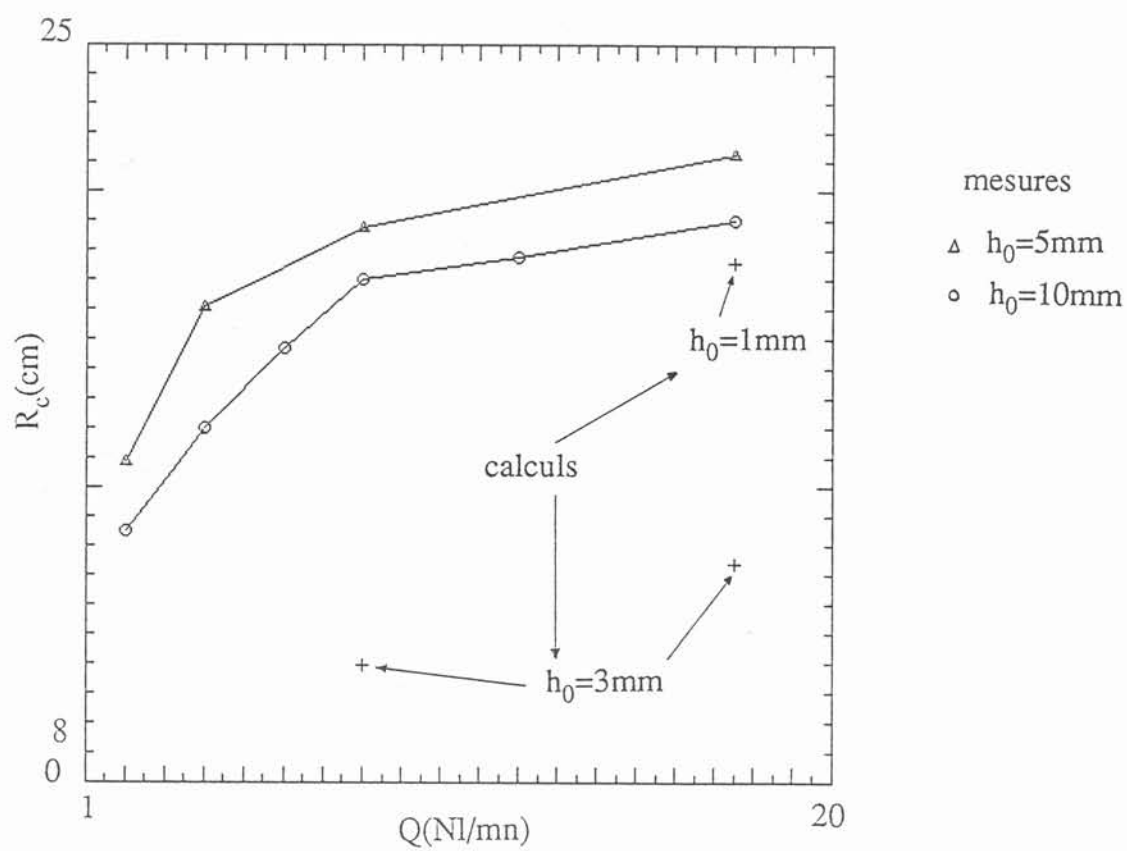


Figure 5.35 : Influence et répartition d'une couche d'huile.





des transferts métal-laitier.

Nous prévoyons l'utilisation d'un laser multicomposantes (2 ou 3) pour mesurer les vitesses dans l'eau.

L'emploi d'autres couples de fluides comme mercure-argon ou étain-argon devrait être envisagé pour étudier l'influence de la tension superficielle, de la pression métallostatique, de la température et de la différence de masse volumique entre le métal et le laitier. De même, si une transition du régime d'écoulement du jet gazeux, du type de celle observée §5.5.11 avec de l'eau, se répétait avec un métal chaud, l'extrapolation à une cuve réelle serait sérieusement envisageable.

## CHAPITRE VI

### Cas des poches industrielles

6.1) Problème de similitude

6.2) Taille de bulles

6.3) Poches réelles

6.4) Comparaison et conclusions



## CHAPITRE VI

### Cas des poches industrielles

#### 6.1) Problème de similitude

Associer deux écoulements, deux configurations à l'aide d'une similitude n'est jamais un problème simple. Le cas des poches de traitement de métaux liquides a fait l'objet de nombreuses études, pour lesquelles une maquette froide d'échelle réduite a été utilisée. Le principal critère de similitude habituellement employé porte sur la conservation de la puissance spécifique de brassage  $\varepsilon$ . Le travail du gaz injecté est dû :

- à son expansion résultant de la différence de pression et de température près de la tuyère (par rapport aux conditions d'injection),
- au transfert d'énergie cinétique du gaz au liquide près de la tuyère,
- au travail des bulles pendant leur ascension dans le métal.

Nous pouvons supposer que les deux premiers aspects n'ont qu'une influence très locale près de l'injecteur, et ne contribuent que pour une petite part à la recirculation du métal /6.1/. Alors, la puissance de brassage effective est principalement due au troisième aspect. Mais la littérature est remplie de formules de calcul de cette puissance de brassage, toutes différentes les unes des autres /6.1,6.2,6.3,6.4/. Elle est généralement estimée par la formule /6.5/ :

$$\varepsilon = 371 Q T \ln\left(1 + \frac{\rho_1 g H}{P_a}\right) \quad (6.1)$$

avec :

|               |  |
|---------------|--|
| $\varepsilon$ | puissance spécifique de brassage (W),  |
| $Q$           | débit volumique de gaz ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ ) mesuré dans les conditions normales, |
| $T$           | température (K),   |
| $g$           | accélération de la pesanteur ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ),                               |
| $H$           | hauteur du bain (m),   |
| $\rho_1$      | masse volumique du mélange ( $\text{kg m}^{-3}$ ),   |
| $P_a$         | pression environnante (Pa).  |

#### 6.2) Taille de bulles

Nous avons vu qu'il importait de pouvoir prédire le diamètre des bulles. Si dans le cas de la maquette à eau nous avons pu utiliser les valeurs mesurées, dans le cas d'une poche industrielle, il nous faut pouvoir le calculer.

Pour une injection du type jetting, l'importante tension superficielle des métaux liquides ne modifie pas énormément, comme nous pourrions le croire, les vitesses d'ascension des bulles. Schwertdtfefer /6.6/ a montré qu'il existe en effet une relation

linéaire entre les nombres d'Eotvos et de Weber :

$$Eo = 2 We - 4$$

$$\text{avec } Eo = \frac{g \rho d^2}{\gamma} \quad We = \frac{du^2 \rho}{\gamma} \quad (6.2)$$

Et le rapport de la tension superficielle  $\gamma$  et de la masse volumique  $\rho$  n'est pas tellement différent (facteur 2) pour un métal liquide ou pour l'eau.

Le diamètre des bulles dans des métaux fondus peut aussi être estimés à partir de la relation suivante [6.7] :

$$d = 0.091 \left( \frac{\gamma}{\rho_l} \right)^{0.5} U_g^{0.44} \quad (6.3)$$

dans le système d'unités C.G.S.

Nous montrons au paragraphe 6.4 comment la variation spatiale de la taille des bulles dans une poche réelle influence la dynamique du brassage et les transferts métal-laitier.

### 6.3) Poches réelles

Plaçons-nous dans un contexte industriel en considérant la poche de traitement de 6 tonnes IRSID dont les caractéristiques sont :

- diamètre  $D=3.2$  m et hauteur  $H=2.5$  m.
- métal fondu : acier, de masse volumique  $\rho=7000$  kg m<sup>-3</sup>, à une température  $T=1625$  °C, de viscosité dynamique  $\mu=0.0046$  Pl, de tension interfaciale avec l'air  $\gamma=1.8$  kg s<sup>-2</sup>.
- gaz injecté : azote, à un débit  $Q=0.26$  Nm<sup>3</sup>/mn, de masse volumique  $\rho=1.76$  kg/m<sup>3</sup>, de viscosité dynamique  $\mu=10^{-6}$  Pl.

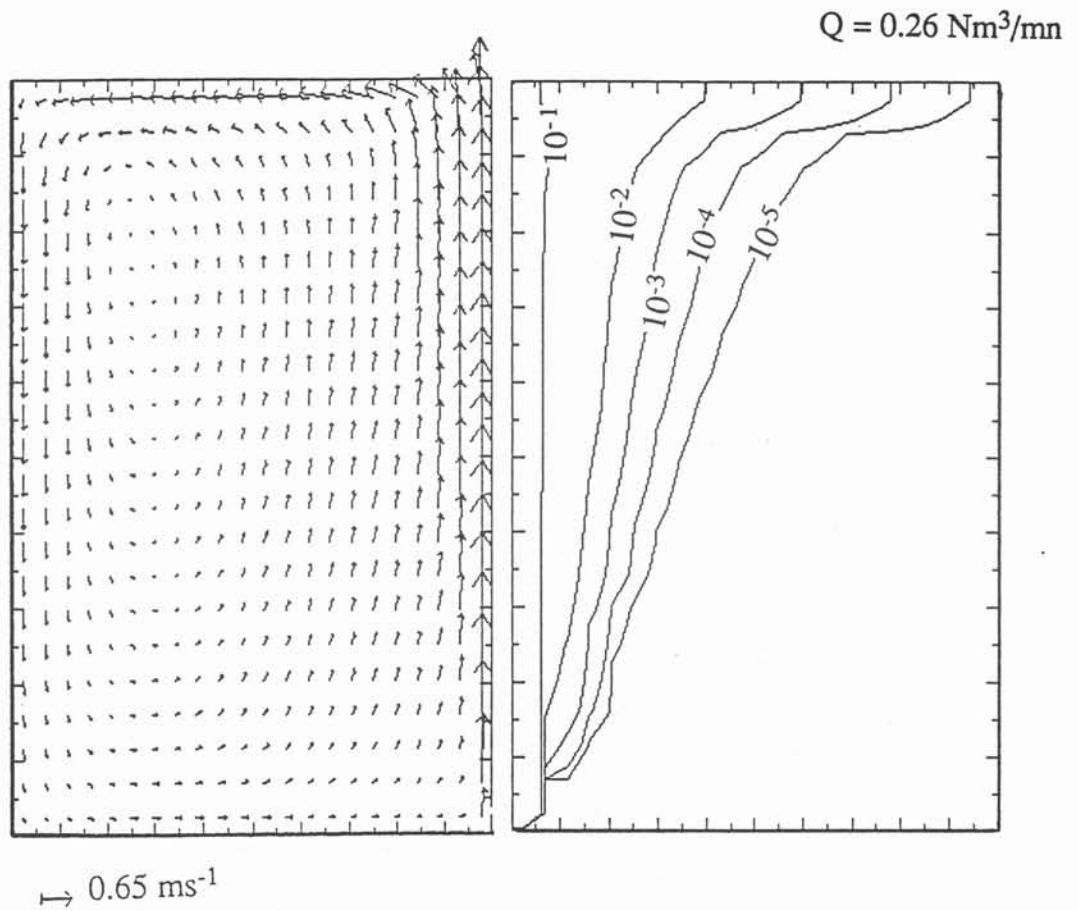
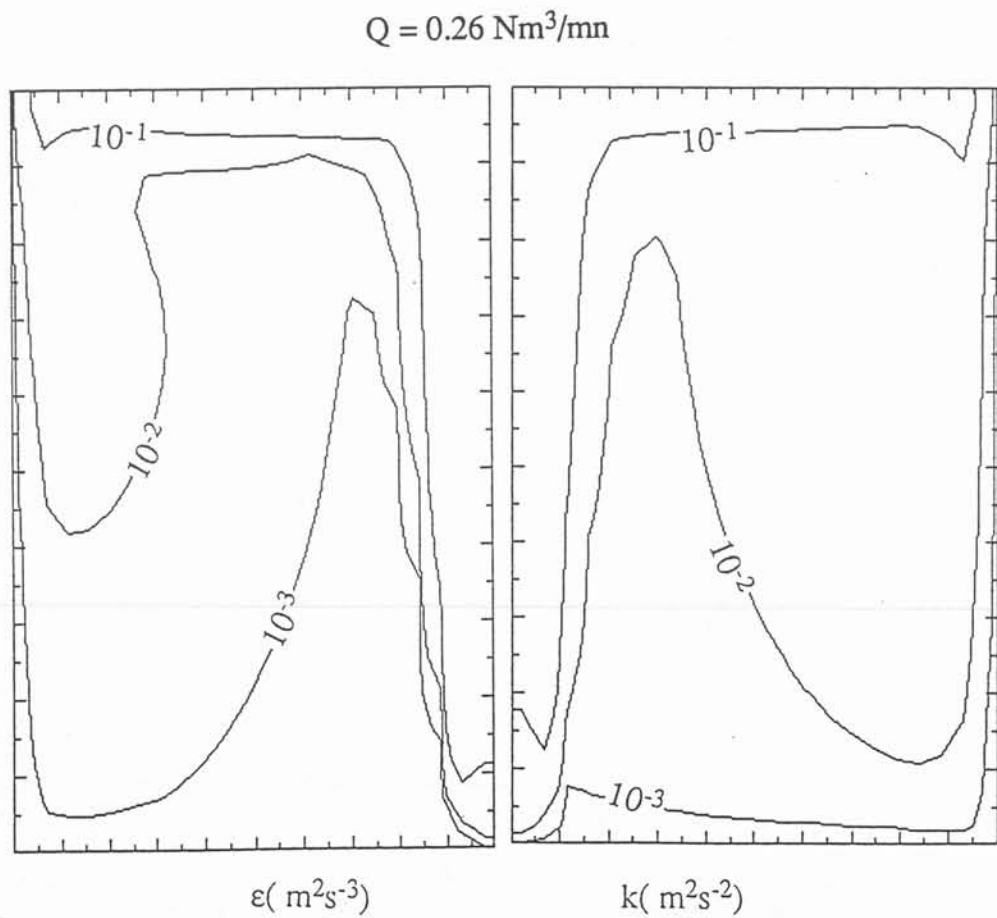
Voici les résultats obtenus dans le cas d'une injection centrée du gaz.

### 6.4) Comparaison et conclusions

La figure 6.1 représente le champ de vitesse liquide calculé, ainsi que la répartition spatiale du taux de présence du gaz dans la cuve. Nous pouvons remarquer un mouvement de rotation en bloc du métal liquide, avec une vitesse de recirculation obtenue près de la paroi latérale de  $0.65$  ms<sup>-1</sup> environ. Il apparaît également que le panache reste assez étroit. Notons enfin que l'échelle caractéristique moyenne des bulles varient de 2 cm près du fond de la cuve à 4 cm à la surface libre.

Les distributions spatiale d'énergie cinétique de la turbulence et de son taux de dissipation sont montrées en figure 6.2. Il est clair que l'énergie cinétique de la turbulence est importante à la surface libre et à l'intérieur du panache. Cette remarque reste aussi valable pour son taux de dissipation. De plus, nous pouvons observer trois zones à dissipation différente :

Figure 6.1 : Champ de vitesse et isovaleurs du taux de présence.

Figure 6.2 : Isovaleurs de l'énergie cinétique de la turbulence  $k$  et de son taux de dissipation,  $\epsilon$ 

- i) importante dissipation près de la surface libre et dans le panache,
- ii) dissipation moyenne au coeur du bain,
- iii) faible dissipation près du fond de la cuve.

Dans ces conditions de brassage, la relation 5.9 ci-dessous fournit une estimation du coefficient d'échange pour le transfert de masse à l'interface entre deux liquides /1.25/, métal-laitier par exemple :

$$h_m = 0.32 \delta \left( \frac{D\rho}{\gamma} \right)^{1/2} u_*^{3/2} \quad (5.9)$$

avec

- $\delta$  coefficient traduisant l'effet de la turbulence dans le laitier (=2.6),
- $D$  coefficient de diffusion de l'espèce chimique considérée,
- $\rho$  masse volumique du liquide,
- $\gamma$  tension interfaciale métal-laitier,
- $u_*$  vitesse de frottement interfaciale.

Si nous appliquons cette corrélation au cas de la désulfuration du métal par le laitier, pour un débit de  $Q=0.26\text{Nm}^3/\text{mn}$ , c'est à dire un débit réel traversant la surface libre ou l'interface métal-laitier de  $Q=1.8\text{m}^3/\text{mn}$ , la vitesse de frottement moyenne à l'interface est  $u_*=0.30\text{mm/s}$  et la valeur moyenne sur la surface de  $h_m$  est de  $0.57\text{mm/s}$ . Cette valeur peut être comparée à des données expérimentales obtenues sur poches industrielles. La compilation d'essais réalisés par l'IRSID /6.5/ a conduit à la relation valable en injection centrée à mi-rayon :

$$h_m = \beta \left( \frac{D_s}{A} Q \frac{T}{273} \frac{P_a}{P} \right)^{1/2} \quad (6.2)$$

- $D_s$  coefficient de diffusion du soufre ( $=4.56 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$  à  $1625^\circ\text{C}$ ),
- $Q$  débit volumique de gaz ( $\text{m}^3 \text{ s}^{-1}$ ) mesuré dans les conditions normales,
- $A$  surface horizontale de la cuve ( $\text{m}^2$ ),
- $T$  température (K),
- $P_a$  pression environnante (Pa).
- $P$  pression à l'interface métal-laitier (Pa).
- $\beta$  coefficient déterminé expérimentalement ( $=500 \text{ m}^{-0.5}$ ),

Ainsi, la valeur mesurée est de  $h_m=2.1\text{mm/s}$ , soit quatre fois plus grande. Cette différence entre le calcul et la mesure peut s'expliquer de trois manières :

i) la relation 5.9 est une formule approximative. D'ailleurs, la différence observée disparaît si nous employons la formule de Levich (elle est identique à celle de Davies avec un coefficient 1 au lieu du 0.32). Des mesures conduites à l'IRSID ont également montré que sous l'action d'un brassage électromagnétique, la formule (5.9) sous-estimait la valeur du coefficient d'échange : expérimentalement, le produit  $0.32 \delta$  prend la valeur 3.3.

ii) la valeur moyenne de la vitesse de frottement en surface est classiquement obtenue à partir de la valeur moyenne de l'énergie cinétique de la turbulence à

l'interface par la relation suivante :

$$u_*^2 = C_\mu^{1/2} k$$

Or cette relation est valable près d'une paroi et sert dans ce cas à exprimer la valeur de l'énergie cinétique de la turbulence en fonction de la vitesse de frottement.

En présence d'un laitier en surface, cette relation sous-estime la valeur de la vitesse de frottement comme nos calculs ont pu le montrer. Il est nécessaire d'utiliser la relation 4.5 quand le couplage hydrodynamique métal-laitier est effectué.

iii) des expériences réalisées avec des métaux chauds ont permis de mettre en évidence le fait que l'interface métal-laitier est déformée sous l'action du brassage pneumatique /6.8/ d'une manière relativement importante, modifiant ainsi la valeur de l'aire interfaciale (celle-ci n'est plus égale à la surface horizontale de la cuve). Il est à noter qu'une réaction chimique entre le métal et le laitier a tendance à réduire ces déformations (de la même manière, une réaction chimique métal-gaz a pour effet de réduire la "rugosité" de l'interface des bulles).

Le tableau ci-dessous récapitule les valeurs de coefficients d'échange mesurées et calculées :

| $C_k = C_\varepsilon$ | $Q(\text{Nm}^3/\text{mn})$ | $\varepsilon(\text{kW})$<br>calculée (6.1) | $\varepsilon(\text{kW})$<br>calculée | $u_*(\text{mm/s})$<br>calculée | $h_m(\text{mm/s})$<br>calculé (5.9) | $h_m(\text{mm/s})$<br>mesuré (6.2) |
|-----------------------|----------------------------|--|--------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| 0.                    |                            |  | 3.1                                  | 0.25                           | 0.44                                |                                    |
|                       | 0.26                       | 3.0  |                                      |                                |                                     | 2.1                                |
| 0.3                   |                            |  | 3.2                                  | 0.30                           | 0.57                                |                                    |

Nous remarquons ainsi que l'estimation de la puissance de brassage par la formule 6.1 est correcte si nous la comparons avec la moyenne du taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence dans la poche (colonnes 3 et 5 du tableau ci-dessus). L'introduction des termes de production supplémentaire d'énergie cinétique de la turbulence et de sa dissipation sous l'effet de la présence de la phase dispersée a tendance à augmenter la valeur du coefficient d'échange et donc à la rapprocher de la valeur mesurée (lignes 1 et 2 du tableau ci-dessus). Si la formule 5.9 sous-estime cette valeur, les variations du coefficient d'échange avec le débit sont au contraire bien décrites :

$$h_m \text{ calculé} \sim Q^{0.6}$$

$$h_m \text{ mesuré} \sim Q^{0.5}$$

Notons enfin que l'expansion des bulles sous l'effet de la pression contribue à l'expansion du panache. Les calculs montrent que la taille du panache est plus grande dans le cas où la taille des bulles est fonction de la pression que lorsque celle-ci est constante. Ceci est d'ailleurs cohérent avec les observations réalisées sur poches réelles.

En conclusion, il apparaît que ce programme GALILAI est un outil de prédiction très correct, tout au moins pour les tendances, pour les poches réelles.





## Conclusion

En conclusion, nous pouvons dire que le programme GALILAI peut assurer la prédiction du brassage et des transferts de masse métal-laitier dans une poche de traitement. Tant sur le plan hydrodynamique (écoulement du mélange métal-gaz) que du point de vue transfert de masse, la confrontation des prédictions avec les mesures s'est avérée très satisfaisante. Et pour consolider ce programme, les efforts futurs devront porter essentiellement sur les points suivants :

- enrichissement de la base de données expérimentales par l'utilisation de systèmes laser (L.D.A.) pour mesurer les champs de vitesses moyennes et turbulentes dans la phase continue liquide en dehors du panache et pour préciser la configuration du panache pour des injections excentrées. L'étude du transfert liquide-liquide et liquide-gaz simulant les transferts métal-laitier et métal-gaz devra se faire à l'aide d'autres couples de fluides. Le rôle de l'injecteur, notamment sa nature (tuyère, bouchon poreux,...), son diamètre sur le brassage et les transferts devra faire l'objet d'une recherche plus systématique.

- affinage du modèle de couplage hydrodynamique des deux phases, et comparaison avec d'autres codes de calcul,

- accroissement de la précision de discrétisation des équations de transport,

- augmentation du taux de vectorisation du programme numérique.

Le traitement des cas industriels au chapitre VI s'est avéré très intéressant. La puissance du code de calcul est alors apparue quand nous avons voulu modifier les tailles des cuves, les débits, les fluides et les conditions d'injection du gaz.

En nous tournant vers l'avenir, nous voyons clairement que le modèle physique et numérique GALILAI peut avoir de nombreuses applications :

- solidification, en coulée continue par exemple, avec le mélange liquide-solide,

- influence d'un brassage par gaz dans les fours électriques,

- transport pneumatique.



## Références bibliographiques

- /0.1/ J.M. DELHAYE  
"Equations aux moyennes spatiales et aux moyennes statistiques des écoulements diphasiques"  
La Houille Blanche, 5, (1967), pp 559-566
- /0.2/ P.V. RIBOUD, J.P. MOTTE, D. SENANEUCH, M. JEANNEAU  
"Désulfuration de l'acier en poche et traitement par le calcium"  
Rapport externe IRSID, (1979), ACI 79 RE 606.
- /1.1/ J. SZEKELY  
"Fluid Flow Phenomena in Metals Processing"  
Academic Press (1979).
- /1.2/ Y. OZAWA, K. MORI  
"Effect of physical properties of gaz and liquid on bubbling-jetting phenomena in gas injection into liquid"  
Transactions ISIJ, vol 26, (1986), pp 291-297.
- /1.3/ G. PICHOT  
"Propriétés de transport des suspensions industrielles appliquées au transport des bruts lourds émulsionnés"  
Thèse de Docteur Ingénieur, (1984), Univ. de Nantes.
- /1.4/ Y. OZAWA, K. MORI  
"Characteristics of jetting observed in gas injection into liquid"  
Transactions ISIJ, vol 23, (1983), pp 764-768.
- /1.5/ E.O. HOEFELE, K. BRIMACOMBE  
Metallurgical Transactions B, vol 10B, (1979), pp 631.
- /1.6/ B.D. YOU, W. POLANSCHUTZ, H. HIEBLER  
"Model investigations on the penetration of melts into injection nozzles"  
Steel Research 57, No 8, (1986), pp 356-360.
- /1.7/ S. ASAI, T. OKAMOTO, J.C. HE, I. MUCHI  
"Mixing time of refining vessels stirred by gas injection"  
Transactions ISIJ, vol 23, (1983), pp 43-50.
- /1.8/ S. ASAI, M. KAWACHI, I. MUCHI  
"Fluid Flow and Mass transfer in Gas Stirred Ladles"  
à paraître dans Tetsu to Hagane (1987).
- /1.9/ L. DOUBLIEZ  
"Coalescence et viscosité interfaciale"  
Rapport - Centre de recherche en dynamique des fluides et transferts thermiques - Université de Nantes (1985).
- /1.10/ V.G. LEVICH  
"Physicochemical hydrodynamics"  
Prentice Hall (1962).

- /1.11/ S.H. KIM, R.J. FRUEHAN  
"Physical modeling of liquid/liquid mass transfer in gas-stirred ladles"  
Metallurgical Transactions B, vol 18B, (1987), pp 381-390.
- /1.12/ M.J. McNALLAN, T.B. KING  
"Fluid dynamic of vertical submerged gas jets in liquid metal processing systems"  
Metallurgical Transactions B, vol 13B, (1982), pp 165-173.
- /1.13/ J.H. GREVET, J. SZEKELY, N. EL KADDAH  
"An experimental and theoretical study of gas bubble driven circulation systems"  
Int. J. Heat Mass Transfer, vol 25, n° 4, (1982), pp 487-497.
- /1.14/ G.B. WALLIS  
"One dimensional two-phase flow"  
Mc. Graw Hill (1969).
- /1.15/ D. MAZUMBDAR, R.I.L. GUTHRIE  
"Hydrodynamic modeling of some gas injection procedures in Ladle metallurgy operations"  
Metallurgical Transactions B, vol 16B, (1985), pp 83-90.
- /1.16/ Y. SAHAI, R.I.L. GUTHRIE  
"Hydrodynamics of gas stirred melts"  
Metallurgical Transactions B, vol 13B, (1982), pp 203-211.
- /1.17/ S.E. ELGHOBASHI, T.W. ABOU-ARAB  
"A two-equation turbulence model for two phase flows"  
Phys. Fluids, 26(4), (1983), pp 931-938.
- /1.18/ A.A. MOSTAFA, S.E. ELGHOBASHI  
"A two-equation turbulence model for jet flows laden with vaporizing droplets"  
Int. J. Multiphase Flow, vol 11, n° 4, (1985), pp 515-533.
- /1.19/ M. ISHII  
"Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flows"  
Eyrolles. Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France (1975).
- /1.20/ T.L. COOK, F.H. HARLOW  
"Vortices in bubbly two-phase flow"  
Int. J. Multiphase Flow, vol 12, No 1, (1986), pp 35-61.
- /1.21/ F. DURST, D. MILOJEVIC, B. SCHONUNG  
"Eulerian and lagrangian predictions of particulate two-phase flows : a numerical study"  
Appl. Math. Modelling, (1984), vol 8, pp 101-115.
- /1.22/ M. LANCE  
"Contribution à l'étude de la turbulence dans la phase liquide des écoulements à bulles"  
Thèse de Docteur Ingénieur, (1979), Université Claude Bernard de Lyon.

- /1.23/ B.DOBROWOLSKI  
 "A computational model for the prediction of two-dimensional non-equilibrium turbulent two-phase flow"  
 Arch. Mech., vol 38, (1986), pp 611-634.
- /1.24/ D.A.DREW  
 "Mathematical modeling of two-phase flow"  
 Ann. Rev. Fluid. Mech., 15, (1983), pp 261-291.
- /1.25/ J.T. DAVIES  
 "Phenomena"  
 Academic Press, New-York, 1972.
- /1.26/ S. ASAI, I. MUCHI  
 "Fluid flow and mass transfer in gas stirred ladles"  
 Scaninject IV, 1986, Lulea, Suède.
- /2.1/ C. TRUESDELL, R. TOUPIN  
 "The classical field theories"  
 Encyclopedia of physics, vol III/I, pp 226-793. Berlin, ... : Springer (1960).
- /2.2/ R. ARIS  
 "Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics"  
 Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall (1962).
- /2.3/ O. SIMONIN, P.L. VIOLET  
 "On the computation of turbulent two-phase flows in the Eulerian formulation"  
 Turbulent two-phase flow system, EUROMECH 234, (1988), Toulouse, France.
- /2.4/ B.E. LAUNDER, D.B. SPALDING  
 "The numerical computation of turbulent flows"  
 Comp. Mech. Appl. Mech. Eng., 3, (1974).
- /2.5/ P.L. VIOLET  
 "The modeling of turbulent recirculating flows for the purpose of reactor thermal-hydraulic analysis"  
 Nuclear Eng. and Design, 99, (1985), pp 365-377.
- /2.6/ C.V. ALONSO  
 "Stochastic models of suspended sediment dispersion"  
 A.S.C.E., 107, (1981), pp 733-757.
- /2.7/ S.V. PATANKAR  
 "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow"  
 Mc Graw-Hill, New York (1980).
- /2.8/ J.M.DELHAYE, J.L.ACHARD  
 "On the averaging operators introduced in two-phase flow modeling"  
 CNSI spec. meet. Transient Two-phase FLOW, Toronto, 1976.
- /3.1/ N. BESSHO, S. TANIGUCHI, A. KIKUCHI  
 "Mass transfer between gas and liquid in a gas-stirred vessel"  
 Transactions ISIJ, vol 14, (1985), pp 1623-1630.
- /4.1/ G. RYSKIN, L.G. LEAL  
 "Orthogonal mapping"  
 J. of Computational physics, 50, (1983), pp 71-100.

- /4.2/ M. VISBAL, D. KNIGHT  
"Generation of orthogonal and nearly orthogonal coordinates with grid control near boundaries"  
AIAA Journal, 20, (1982), pp 305-306.
- /4.3/ WARSI  
"Generation of three dimensional grids through elliptic differential equations"  
Von Karman Institute, Lecture serie 04 (1984).
- /4.4/ J.F. THOMPSON, Z.U.A. WARSI, C.W. MASTIN  
"Boundary-fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equations. A review"  
Journal of Computational Physics, 47, (1982), pp 1-108.
- /4.5/ C.F. SHIEH  
"Three dimensional grid generation using elliptic equations with direct grid distribution control"  
AIAA Journal, vol 22, No 3, (1984), pp 361-364.
- /4.6/ P.D. THOMAS, J.F. MIDDLECOFF  
"Direct control of the grid point distribution in meshes generated by elliptic equations"  
AIAA Journal, vol 18, No 6, (1980), pp 652-656.
- /4.7/ J.F. THOMPSON, F.C. THAMES, C.W. MASTIN  
"Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two dimensional bodies"  
Journal of Computational Physics, vol 15, No 3, (1974).
- /4.8/ S.B. POPE  
"The calculation of turbulent recirculation flows in general orthogonal coordinates"  
Journal of computational physics, 26, (1978), pp 197-217.
- /4.9/ A.D. GOSMAN, W.M. PUN, A.K. RUNCHAL, D.B. SPALDING, M. WOLFSHTEIN  
"Heat and Mass transfer in recirculating Flows"  
Academic Press, London (1969).
- /4.10/ G.D. RAITHBY  
"Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow"  
Computer Meth. in Applied Mechanics and Engineering, 9, (1976), pp 153-164.
- /4.11/ G. DAVIS, G.D. MALLINSON  
"An evaluation of upwind and central difference approximations by a study of recirculating flow"  
Computers and fluids, vol 13, (1985), pp 29-43.
- /4.12/ A.O. DEMUREN  
"False diffusion in three-dimensional flow calculations"  
Computers and fluids, vol 13, (1985), pp 411-419.
- /4.13/ B.P. LEONARD  
"A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation"  
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 19, (1979), pp 59-98.

- /4.14/ D. SOUFFLAND  
 "Développement et validation d'un modèle tridimensionnel non hydrostatique d'écoulements méso-météorologiques en terrain complexe. Le code Mercure"  
 Thèse de Docteur Ingénieur, (1985), U.S.M.G. et I.N.P.G, Grenoble.
- /4.15/ J. ZHU  
 "Calculs des jets turbulents confinés avec recirculations"  
 Th. de D.I., Spécialité Mécanique, (1986), U.S.M.G. et I.N.P.G, Grenoble.
- /4.16/ E. TABERLET  
 "Le brassage turbulent dans les fours à induction"  
 Th. de D.I., Spécialité Mécanique, (1984), U.S.M.G. et I.N.P.G, Grenoble.
- /4.17/ D.B. SPALDING  
 "A novel finite difference formation for differential expressions involving both first and second derivatives"  
 International J., numer. Meth. Eng., 4, (1972), pp 551-559.
- /4.18/ G.D. RAITHBY  
 "A critical evaluation of upstream differencing applied to problems involving fluid flows"  
 Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 9, (1976), pp 73-103.
- /4.19/ J.D. RAMSHAW, J.A. TRAPP  
 "A numerical treatment for low-speed homogeneous two-phase flow with sharp interfaces"  
 J. Comp. Phys., (1986), vol 21, pp 438-453.
- /4.20/ P.T.L. KOH, N.C. MARKATOS, M. CROSS  
 "Numerical simulation of gas-stirred liquid baths with a free surface"  
 ... Chemical Hydrodynamics, (1987), vol 9, No 1-2, pp 197-207.
- /4.21/ D.B. SPALDING  
 "Numerical computation of multiphase flow and heat transfer"  
 Recent advance in numerical methods in fluids, vol 1, (1980), pp 139-168.
- /4.22/ J.M. GALPIN  
 "Solidification et brassage basse fréquence"  
 Th. de D.I., Spécialité Mécanique, (1989), U.S.M.G. et I.N.P.G, Grenoble.
- /4.23/ I. SAWADA  
 "An algorithm for computational fluid dynamics, NSMAC"  
 Transaction of Japanese Society of Mechanical Engineering, in print.
- /4.24/ M. BURTY  
 "Simulations numériques d'écoulements turbulents tridimensionnels"  
 D.E.A., Spécialité Mécanique, (1986), U.S.M.G. et I.N.P.G, Grenoble.
- /5.1/ D. DOMGIN  
 "Etude du brassage pneumatique en poche d'aciérie"  
 Rapport interne IRSID, (1987), PCM87 RP 232.
- /5.2/ M. KAWAKAMI, N. TOMIMOTO, K. ITO  
 "Statistical analysis of gas bubble dispersion in liquid phase"  
 Trans ISIJ, vol 68, (1982), pp 774-783.



- /5.3/ K.H. TACKE, H.G. SCHUBERT, D.J. WEBER, K. SCHWERDTFEGER  
"Characteristics of round vertical gas bubble jets"  
Metallurgical Transactions B, vol 16B, (1985).
- /5.4/ S. TANIGUCHI, A. KIKUCHI, H. MATZUSAKI, N. BESSHO  
"Dispersion of bubbles and gas-liquid mass transfer in a gas-stirred system"  
Trans ISIJ, vol 28, (1988).
- /5.5/ G. BENICHO  
"Etude du brassage pneumatique en poche d'aciérie"  
Rapport interne IRSID, (1988), PCM88 RP 247.
- /5.6/ I. SAWADA, T. KITAMURA, T. OHASHI  
"The mathematical modeling of the coupled reactions in the pre-treatment of molten iron by powder injection"  
Scaninject IV, 1986, Lulea, Suède.
- /5.7/ G.G. KRISHNA MURTHY, S.P. MEHROTRA, A. GOSH  
"Experimental investigation of mixing phenomena in a gas-stirred liquid bath"  
Metallurgical Transactions B, vol 19B, (1988), pp 839-850.
- /5.8/ I. SAWADA  
Scaninject IV, 1984, Lulea, Suède.
- /5.9/ H. LAMB  
"Hydrodynamics"  
Dover Publication, New-York, 1932.
- /6.1/ M. SANO, K. MORI  
"Fluid flows and mixing characteristics in a gas-stirred molten metal bath"  
Trans ISIJ, vol 23, (1983), pp 169-175.
- /6.2/ S.M. BHAVARAJU, T.W.F. RUSSEL, H.W. BLANCH  
AIChE Journal, vol 24, (1978), pp 454-466.
- /6.3/ K. NAKANISHI, T. FUJII, J. SZEKELY  
Iron Steelmaking, vol 2, (1975), p 193.
- /6.4/ P. WATRIN  
"Etude du brassage pneumatique en poche d'aciérie"  
Rapport interne IRSID, (1986), PCM86 RP 224.
- /6.5/ P.V. RIBOUD, VASSE  
Rapport externe IRSID, (1986), PCM86 RE 1061.
- /6.6/ K. SCHWERDTFEGER  
"Velocity of rise of argon bubbles in mercury"  
Chemical Engineering Science, vol 23, (1968), pp 937-938.
- /6.7/ M. SANO, K. MORI, Y. FUJIMA  
Tetsu to Hagané, vol 65, (1979), p 1140.

- /6.8/ DENG, JIANXIONG, OETERS  
 "Kinetics of desulfurization of liquid steel according to ladle metallurgy conditions"  
 7th Japan-Germany Seminar, (1987), pp 33-47.
- /A1.1/ R. CLIFT, J.R. WEBER  
 "Bubbles, drops and particles"  
 Academic press, New York (1978)
- /A1.2/ S.L.LEE  
 "Particulate drag in a dilute turbulent two-phase suspension flow"  
 Int. J. Multiphase Flow, vol 13, No 2, (1987), pp 247-256.
- /A1.3/ V.I. RIVKIND, G.M. RYSKIN, G.A. FISHBEIN  
 "Flow around a sperical drop at intermediate Reynolds numbers"  
 Fluid Dynamics, vol 10, (1976), p 741.
- /A1.4/ V.I. RIVKIND, G.M. RYSKIN  
 "Flow struture in motion of a spherical drop in a fluid medium"  
 Fluid Dynamics, vol 11, (1976), p 5.
- /A1.5/ A.E. HAMIELEC, S.H. STOREY, J.M. WHITEHEAD  
 "Viscous flow around fluid speres at intermediate Reynolds numbers"  
 Can. J. Chem. Eng., vol 41, (1963), p 246.
- /A1.6/ T.L. COOK, F.H. HARLOW  
 "Virtual mass in multiphase flow"  
 Int. J. Multiphase Flow, vol 10, No 6, (1984), pp 691-696.
- /A1.7/ N. ZUBER  
 "On the dispersed two-phase flow in the laminar regime"  
 Chem. Eng. Sci., vol 19, (1964), pp 897.
- /A5.1/ M. DAGUENET, F. AOUANOUK, G. COGNET  
 "Calcul du flux de diffusion sur la surface d'une sonde circulaire située dans le plan d'un disque tournant"  
 Comptes rendus, 281, Série A, (1970), pp 328-331.
- /A5.2/ T. SIEP KHENG, G. COGNET  
 "Sur l'utilisation d'une électrochimique pour la mesure de vitesse dans un panache de convection naturelle : cas du cylindre horizontal"  
 Comptes rendus, 285, Série B, (1977), pp 255-258.
- /A5.3/ G. COGNET, M. LEBOUCHE, M. SOUHAR  
 "Utilisation des techniques électrochimiques pour la mesure du frottement pariétal dans les écoulements diphasiques"  
 La Houille Blanche, 5, (1978), pp 319-322.
- /A5.4/ O. HAIDA, J.K. BRIMACOMBE  
 "Physical model study of the effect of gas kinetic energy in injecting refining processes"  
 Transactions ISIJ, vol 25, (1985), pp 14-20.
- /A5.5/ J.O. HINZE  
 "Turbulence"  
 Mac Graw Hill, (1975).

/A5.6/ S.BENAYAD

Th. de D.I., INPL Nancy, (1982).

/A5.7/ FORTUNA, HANATTY

Int. J. Heat and Mass Transfer, vol 14, (1971), p 1499.

## ANNEXE I

### Transfert de quantité de mouvement

#### A1.1) Force de traînée

A1.1.1) Vitesse relative

A1.1.2) Coefficient de traînée pour une particule solide

A1.1.3) Coefficient de traînée en l'absence de transfert de masse

A1.1.4) Coefficient de traînée d'un ensemble de bulles

#### A1.2) Forces supplémentaires



## ANNEXE I

### Transfert de quantité de mouvement

C'est le terme de couplage entre les deux phases. En l'absence de tout transfert de masse à l'interface et en utilisant une pression  $p$  commune aux deux phases (ce qui revient à négliger les effets de tension interfaciale), le saut de force interfaciale est donné par la relation :

$$M^l + M^g = 0$$

il suffit de modéliser l'un de ces deux termes,  $M^g$  par exemple. Il représente la force exercée par la phase continue liquide sur la phase dispersée gaz. D'après Drew /1.24/, il se décompose en trois termes :

$$M^g = \text{force de traînée} + \text{force d'accélération} + \text{force de poussée}$$

#### A1.1) Force de traînée

La force de couplage entre les deux phases est essentiellement due à la composante de traînée, créée par le mouvement relatif des bulles dans le liquide. Nous pouvons l'écrire ainsi :

$$M^g = -\alpha_g \rho_l F V^r$$

Cette force de traînée équivalente fait intervenir un coefficient de frottement interfacial  $F$  généralement calculé par :

$$F = \frac{3}{4d} C_d(Re, \alpha_g) |V^r|$$

Le problème consiste à exprimer correctement ce coefficient de traînée en fonction des deux nombres adimensionnels que sont le nombre de Reynolds et le taux de présence du gaz.

Dans ce premier modèle, les bulles sont supposées sphériques et de taille fonction uniquement de la pression.

Un point important concerne également l'expression de la vitesse relative entre les deux phases. Pour cela, le paragraphe suivant donne certaines hypothèses utilisées et une formulation de cette vitesse.

##### A1.1.1) Vitesse relative

La valeur moyenne  $V^r$  de la vitesse relative locale entre une bulle et le liquide environnant s'exprime en fonction de la vitesse moyenne relative des deux fluides équivalents  $U^g$  et d'une vitesse de dérive des bulles dépendant de la répartition des bulles dans le liquide et de la turbulence locale (cf Simonin /2.3/):

$$U^g - U^l = U^{gl} = V^r + V^d \quad \text{avec } V^d = - \frac{V^t}{\alpha_g} \text{grad } \alpha_g$$

### A1.1.2) Coefficient de traînée pour une particule solide

Les solutions proposées par Stokes ou Oseen s'appliquent à des particules solides sphériques placées dans des écoulements où les termes d'inertie sont négligeables ou très faibles (nombres de Reynolds inférieur à un). Pour un nombre de Reynolds modéré, nous recommandons la formule de Clift /A1.1/ :

$$C_d = \frac{24}{Re_b} C_d^* \quad \text{avec } Re_b = \frac{\rho_l |u^l - u^g| d}{\mu_l}$$

la correction étant donnée par :

$$C_d^* = \begin{cases} 1 + 0.135 Re_b^{0.82 - 0.05 w} & 0.01 < Re_b < 20 \\ 1 + 0.1935 Re_b^{0.6305} & 20 < Re_b < 200 \end{cases}$$

$$w = \text{Log}_{10} Re_b$$

Dans le cas d'une suspension, nous pouvons raisonnablement attendre une variation du coefficient de traînée avec le taux de présence de la phase dispersée. Une corrélation est valable pour des nombres de Reynolds allant jusqu'à quelques centaines au moins /A1.2/. Elle est analogue à la formule de Stokes en écoulement visqueux, mais basée sur un nombre de Reynolds modifié. La viscosité turbulente qui intervient est fonction de la viscosité de la phase continue, de la taille des particules, de leur taux de présence, du nombre de Reynolds local, de la turbulence et du rapport des masses volumiques fluide-particules.

### A1.1.3) Coefficient de traînée en l'absence de transfert de masse

La différence réside dans le fait que la composante tangentielle de cisaillement est continue à l'interface dans le cas d'une bulle, alors qu'elle s'annule pour une particule solide. Ceci va donc développer un mouvement du gaz à l'intérieur de la bulle. Par ailleurs, le coefficient de traînée est à priori fonction du nombre de Reynolds, du taux de présence du gaz, et des rapports des masses volumiques et des viscosités des deux fluides. Rivkind et al. /A1.3-A1.4/ ont montré que le rapport des masses volumiques n'a pas d'influence sur le coefficient de traînée. Il a proposé une pondération des coefficients de traînée basés sur les nombres de Reynolds des bulles et du liquide, par les viscosités :

$$C_d = \frac{\mu_l C_{ds} + \mu_g C_{db}}{\mu_l + \mu_g} \quad \begin{matrix} 0.5 < Re < 100 \\ \mu_g \approx \mu_l \end{matrix}$$

Hamielec et al. /A1.5/ ont proposé une formule valable quel que soit le rapport des viscosités de deux fluides :

$$C_d = \frac{3.05}{Re^{0.74}} f(\mu_r) \quad f(\mu_r) = \frac{783\mu_r^2 + 214\mu_r + 1080}{(60 + 29\mu_r)(4 + 3\mu_r)} \quad 10 < Re < 100$$

D'après Lance /1.22/, les modèles de Wallis et surtout de Lahey permettent de prédire correctement les mouvements de bulles. Le terme de production de quantité de mouvement interfacial s'écrit :

$$M^k = \frac{3}{4} \rho^1 \frac{C_d}{d} \alpha_g |u^g - u^1|^2$$

$$\frac{C_d}{d} = \max(0.25, 0.0754 \cdot 10^7 Re^{-2.1213}) \quad 900 < Re < 35000$$

Mais cette corrélation ne semble valable que pour de faibles valeurs du taux de présence. Il est aussi possible d'utiliser celle de Dobrowolski /1.23/ :

$$C_d = \frac{24}{Re_b} C_d^* \quad \text{avec } Re_b = \frac{\rho_1 |u^1 - u^g| d}{\mu_1}$$

où le facteur de correction est donné par :

$$C_d^* = 1 + 0.15 Re_b^{0.687}$$

#### A1.1.4) Coefficient de traînée d'un ensemble de bulles

Il est clair que si nous nous intéressons à un panache de bulles, le coefficient de traînée est fonction non seulement du nombre de Reynolds mais aussi du taux de présence du gaz (phase dispersée). Citons la formulation de Wallis /1.14/, utilisée par Simonin /2.3/, qui ne semble adaptée qu'aux écoulements fortement et uniformément dispersés :

$$C_d(Re, \alpha_g) = \alpha_g^m C_d(Re)$$

avec :

$$\begin{aligned} Re < 1000 & \quad C_d = \frac{24}{Re} (1 + 0.15 Re^{0.687}) \\ Re > 1000 & \quad C_d = 0.44 \\ m & = -1.7 \end{aligned}$$



## A1.2) Forces supplémentaires

Drew /1.24/ a introduit une force d'accélération due à la masse virtuelle associée aux bulles. Cook et Harlow /A1.6/ ainsi que Simonin /2.3/ en ont donné une formulation mathématique intéressante mais assez complexe. Ce terme sera négligé en première approximation.

Nous pouvons également tenir compte d'une force de poussée sur les bulles due à leur rotation propre /A1.7/, mais aucune expérience n'a permis de confirmer l'existence et donc l'importance d'une telle force. C'est pourquoi nous avons décidé de la supprimer.

## ANNEXE II

### Equations de transport en coordonnées curvilignes orthogonales

A2.1) Equations

A2.2) Terme source pour la première composante de la vitesse du liquide

A2.3) Terme source pour la première composante de la vitesse du gaz

A2.4) Terme source pour les autres composantes de vitesse

A2.5) Terme source pour l'énergie cinétique de la turbulence

A2.6) Terme source pour le taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence



## ANNEXE II

### Equations de transport en coordonnées curvilignes orthogonales

#### A2.1) Equations

Sans développer cet aspect, nous renvoyons le lecteur à l'analyse tensorielle décrite par Pope /4.8/ pour écrire les équations de transport dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales. Chaque équation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} (|h| \alpha_k \rho_k \phi) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{|h|}{h_i} \{ \alpha_k \rho_k u_i^k \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{h_i \partial \xi_i} \} \right) = |h| S_\phi$$

(1)
(2)
(3)
(4)

où nous reconnaissons les termes

- (1) : de variation temporelle,
- (2) : de convection,
- (3) : de diffusion,
- (4) : source.

Nous allons maintenant écrire l'expression des termes sources  $S_\phi$  et des coefficients de diffusions  $\Gamma_\phi$ .

#### A2.2) Terme source pour la première composante de la vitesse du liquide

variable :

$$\Phi = u_1^1$$

coefficient de diffusion :

$$\Gamma_\phi = \mu_1$$

terme source :

$$S_\phi = -\alpha_1 p_{,1} + f_1 - |h|^{-1} \left( h_1 h_2 \alpha_1 \mu_1 u_1^1 H_1(2) \right)_{,\xi_2} - |h|^{-1} \left( h_2 h_3 \alpha_1 \mu_1 u_1^1 H_1(3) \right)_{,\xi_3} \\ + |h|^{-1} \left( h_1 h_3 \alpha_1 \mu_1 \{ u_{2,1}^1 - u_2^1 H_2(1) \} \right)_{,\xi_2} + |h|^{-1} \left( h_1 h_2 \alpha_1 \mu_1 \{ u_{3,1}^1 - u_3^1 H_3(1) \} \right)_{,\xi_3}$$

$$\begin{aligned}
& + H_2(1) \left( \alpha_1 \rho_1 u_2^{1^2} - 2 \alpha_1 \mu_1 \{ u_{2,2}^1 + u_3^1 H_2(3) \} \right) \\
& + H_3(1) \left( \alpha_1 \rho_1 u_3^{1^2} - 2 \alpha_1 \mu_1 \{ u_{3,3}^1 + u_2^1 H_3(2) \} \right) \\
& + \alpha_1 \mu_1 H_1(2) \left( u_{1,2}^1 + u_{2,1}^1 - u_2^1 H_2(1) \right) + \alpha_1 \mu_1 H_1(3) \left( u_{1,3}^1 + u_{3,1}^1 - u_3^1 H_3(1) \right) \\
& - \left( \alpha_1 \mu_1 \{ H_1(2)^2 + 2 H_2(1)^2 + 2 H_3(1)^2 + H_1(3)^2 \} + \alpha_1 \rho_1 \{ u_2^1 H_1(2) + u_3^1 H_1(3) \} \right) \\
& + \alpha_g F \left( u_1^1 - u_1^g - \frac{v_1}{\alpha_g \sigma_\alpha} \alpha_{1,1} \right) - \frac{2}{3} \left( \alpha_1 \rho_1 + \alpha_1 \mu_1 u_{1,i}^1 \right)_{,1}
\end{aligned}$$

### A2.3) Terme source pour la première composante de la vitesse du gaz

variable :

$$\Phi = u_1^g$$

coefficient de diffusion :

$$\Gamma_\Phi = \mu_g$$

terme source :

$$\begin{aligned}
S_\Phi &= -\alpha_g p_{,1} + f_1 - |h|^{-1} \left( h_1 h_2 \alpha_g \mu_g u_1^g H_1(2) \right)_{,\xi_2} - |h|^{-1} \left( h_2 h_3 \alpha_g \mu_g u_1^g H_1(3) \right)_{,\xi_3} \\
&+ |h|^{-1} \left( h_1 h_3 \alpha_g \mu_g \{ u_{2,1}^g - u_2^g H_2(1) \} \right)_{,\xi_2} + |h|^{-1} \left( h_1 h_2 \alpha_g \mu_g \{ u_{3,1}^g - u_3^g H_3(1) \} \right)_{,\xi_3} \\
&+ H_2(1) \left( \alpha_g \rho_g u_2^{g^2} - 2 \alpha_g \mu_g \{ u_{2,2}^g + u_3^g H_2(3) \} \right) \\
&+ H_3(1) \left( \alpha_g \rho_g u_3^{g^2} - 2 \alpha_g \mu_g \{ u_{3,3}^g + u_2^g H_3(2) \} \right) \\
&+ \alpha_g \mu_g H_1(2) \left( u_{1,2}^g + u_{2,1}^g - u_2^g H_2(1) \right) + \alpha_g \mu_g H_1(3) \left( u_{1,3}^g + u_{3,1}^g - u_3^g H_3(1) \right)
\end{aligned}$$

$$- (\alpha_g \mu_g \{ H_1(2)^2 + 2 H_2(1)^2 + 2 H_3(1)^2 + H_1(3)^2 \} + \alpha_g \rho_g \{ u_2^g H_1(2) + u_3^g H_1(3) \})$$

$$- \alpha_g F (u_1^l - u_1^g - \frac{\gamma_1}{\alpha_g \sigma_\alpha} \alpha_{1,1})$$

#### A2.4) Terme source pour les autres composantes de vitesse

Les termes sources pour les autres composantes de la vitesse du liquide et du gaz sont obtenus par permutation circulaire sur les indices 1 2 3.

#### A2.5) Terme source pour l'énergie cinétique de la turbulence

variable :

$$\Phi = k$$

coefficient de diffusion :

$$\Gamma_\Phi = \frac{\mu_1}{\sigma_k}$$

terme source :

$$S_\Phi = \alpha_1 (G - \rho_1 \varepsilon) + 2 C_k \alpha_g \rho_1 F k$$

#### A2.6) Terme source pour le taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence

variable :

$$\Phi = \varepsilon$$

coefficient de diffusion :

$$\Gamma_\Phi = \frac{\mu_1}{\sigma_\varepsilon}$$

terme source :

$$S_\Phi = \frac{\varepsilon}{k} \alpha_1 (C_1 G - C_2 \rho_1 \varepsilon) + 2 C_\varepsilon \alpha_g \rho_1 F \varepsilon$$



## ANNEXE III

### Discrétisation des équations de transport

A3.1) Principe

A3.2) Terme de diffusion

A3.3) Terme de convection

A3.4) Terme source

A3.4.1) Pression et force de volume

A3.4.2) Terme source spécial

A3.4.3) Autres termes sources





## ANNEXE III

### Discrétisation des équations de transport

#### A3.1) Principe

La discrétisation des équations de transport est directement inspirée de la méthode développée par Pope /4.8/ et Gosman /4.9/. Chacune des équations de transport est intégrée dans son volume de contrôle associé (voir figure).

Nous avons vu dans l'annexe II que les équations de transport dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales s'écrivent comme la somme d'une terme de variation temporelle (1), de convection (2), de diffusion (3) et source (4) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (|h| \alpha_k \rho_k \phi) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{|h|}{h_i} \{ \alpha_k \rho_k u_i^k \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{h_i \partial \xi_i} \} \right) = |h| S_\phi$$

(1)
(2)
(3)
(4)

Nous ne détaillerons la discrétisation que de la composante  $u$  de la vitesse du liquide pour limiter l'écriture.

Avant tout, précisons les notations employées :

a) Nous rappelons qu'un double système de numérotation est utilisé, l'un pour les variables physiques, l'autre pour les variables géométriques.

b) Dans cette annexe et seulement dans cette annexe, la viscosité  $\mu$  et la masse volumique  $\rho$  qui interviennent dans les équations de transport sont en réalité les grandeurs réduites équivalentes :

viscosité :  $\mu = \alpha \mu$

masse volumique :  $\rho = \alpha \rho$

c) Les courbures du maillage sont calculées de la façon suivante :

$$H_1(2)_{l,m,n} = \left( \frac{\partial h_1}{h_1 \partial s_2} \right)_{l,m,n} = \frac{h_{1,l,m+1,n} - h_{1,l,m-1,n}}{h_{1,l,m,n} h_{2,l,m,n} dy}$$

La surface d'une facette est évaluée ainsi :

$$S_{PE}^{23} = h_{2,PE} h_{3,PE} dy dz$$

Notons que dans cette annexe, les pas de discrétisation notés  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  sont évalués dans le domaine transformé (le cube).

### A3.2) Terme de diffusion

C'est le terme suivant :

$$D = \iiint_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( h_2 h_3 \mu_1 \frac{\partial u^1}{\partial s_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( h_1 h_3 \mu_1 \frac{\partial u^1}{\partial s_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} ( \dots ) \right\} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

Après une première intégration immédiate, ce terme s'écrit :

$$D = \iint_{\xi_2 \xi_3} \left( \mu_1 \frac{\partial u^1}{\partial s_1} \right)_w^e ds_2 ds_3 + \iint_{\xi_1 \xi_3} \left( \mu_1 \frac{\partial u^1}{\partial s_2} \right)_s^n ds_1 ds_3 + \iint_{\xi_1 \xi_2} \left( \mu_1 \frac{\partial u^1}{\partial s_3} \right)_b^f ds_1 ds_2$$

Nous calculons ces trois intégrales à l'aide du théorème de la moyenne, ce qui nous conduit à l'expression finale :

$$D = \sum (u_i^1 - u_p^1) d_i \quad i = N, S, E, W, F, B$$

Les coefficients s'expriment par :

$$d_E = \mu_{1,j,k} S_{PE}^{23} / (h_{1,m,n} dx)$$

$$d_W = \mu_{1-1,j,k} S_{PW}^{23} / (h_{1-2,m,n} dx)$$

$$d_N = 0.25 (\mu_{1,j,k} + \mu_{1-1,j,k} + \mu_{1,j+1,k} + \mu_{1-1,j+1,k}) S_{PN}^{13} / (h_{2-1,m+1,n} dy)$$

$$d_S = 0.25 (\mu_{1,j,k} + \mu_{1-1,j,k} + \mu_{1,j-1,k} + \mu_{1-1,j-1,k}) S_{PS}^{13} / (h_{2-1,m-1,n} dy)$$

$$d_F = 0.25 (\mu_{1,j,k} + \mu_{1-1,j,k} + \mu_{1,j,k+1} + \mu_{1-1,j,k+1}) S_{PB}^{12} / (h_{3-1,m,n+1} dz)$$

$$d_B = 0.25 (\mu_{1,j,k} + \mu_{1-1,j,k} + \mu_{1,j,k-1} + \mu_{1-1,j,k-1}) S_{PB}^{12} / (h_{3-1,m,n-1} dz)$$

Voici l'expression des facettes du volume contrôle :

$$S_{PE}^{23} = h_{2,m,n} h_{3,m,n} dy dz$$

$$S_{PW}^{23} = h_{2-1,m,n} h_{3-2,m,n} dy dz$$

$$S_{PN}^{13} = h_{1-1,m+1,n} h_{3-1,m+1,n} dx dz$$

$$S_{PS}^{13} = h_{1-1,m-1,n} h_{3-1,m-1,n} dx dz$$

$$S_{PF}^{12} = h_{1-1,m,n+1}^1 h_{1-1,m,n+1}^2 dx dy$$

$$S_{PB}^{12} = h_{1-1,m,n-1}^1 h_{1-1,m,n-1}^2 dx dy$$

### A3.3) Terme de convection

C'est le terme non linéaire des équations :

$$C = \int_{vol} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} (h_2 h_3 \rho_1 u^1 u^1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_1 h_3 \rho_1 u^1 v^1) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (h_1 h_2 \rho_1 u^1 w^1) \right\} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

Après une première intégration immédiate, ce terme s'écrit aussi :

$$C = \iint (\rho_1 u^1 u^1)_w^e ds_2 ds_3 + \iint (\rho_1 u^1 v^1)_s^n ds_1 ds_3 + \iint (\rho_1 u^1 w^1)_b^f ds_1 ds_2$$

Chacune de ces trois intégrales est linéarisée et nous utilisons un schéma hybride centré-décentré amont suivant la valeur du nombre de Péclet :

- si  $Pe > 2$ , alors nous employons un schéma décentré amont, qui s'écrit pour la première intégrale :

$$C_1 = \iint_{\xi_2 \xi_3} \left\{ (\rho u u)_e - (\rho u u)_w \right\} ds_2 ds_3$$

$$C_1 = 0.5 u_E (q_E - |q_E|) + 0.5 u_P (q_E + |q_E|) - 0.5 u_W (q_W - |q_W|) - 0.5 u_P (q_W + |q_W|)$$

- si  $Pe < 2$ , alors nous employons un schéma centré :

$$C_1 = 0.5 (u_E + u_P) q_E - 0.5 (u_P + u_W) q_W$$

Finalement, le terme convectif s'écrit sous la forme d'une double somme, où la seconde somme représente la production de quantité de mouvement dans la direction 1 résultant de l'existence d'un surplus de masse dans la maille considérée :

$$C = \sum 0.5 (q_i - |q_i|) (u_i^1 - u_P^1) + u_P^1 \sum q_i$$

### A3.4) Terme source

Nous utilisons le théorème de la moyenne pour évaluer la plupart de ces termes sources. Distinguons plusieurs catégories de termes sources :

### A3.4.1) Pression et force de volume

Ce sont les termes moteurs de l'écoulement :

$$SU_1 = \int_{vol} \left( \frac{\partial p}{\partial s_1} - f_1 \right) ds_1 ds_2 ds_3$$

Simplement, ce terme s'exprime par :

$$SU_1 = VOL \left( \frac{p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k}}{h_{1-1,m,n}} - f_{1,i,j,k} \right)$$

Le volume de la maille est évalué quant à lui comme suit :

$$VOL = h_{1-1,m,n} h_{2-1,m,n} h_{3-1,m,n} dx dy dz$$

### A3.4.2) Terme source spécial

Cette appellation provient du fait que nous regroupons dans ce terme toutes les forces contribuant à augmenter la valeur du pivot, c'est à dire la valeur du coefficient associé au noeud de vitesse central P. Ainsi, plus ce terme sera important, plus la convergence sera rapide par la méthode de résolution de Gauss-Seidel (critère de Scarborough) :

$$SU_2 = - \int_{vol} \left( \mu \left\{ H_1(2)^2 + H_1(3)^2 + 2 H_2(1)^2 + 2 H_3(1)^2 \right\} + \right. \\ \left. \rho_1 \left\{ v^1 H_1(2) + w^1 H_1(3) \right\} \right) u^1 ds_1 ds_2 ds_3$$

A l'ordre un, ce terme s'écrit :

$$SU_2 = - VOL u_p^1 \left( \mu_p \left\{ H_1(2)^2 + H_1(3)^2 + 2 H_2(1)^2 + 2 H_3(1)^2 \right\}_p + \right. \\ \left. \rho_p \left\{ v_p^1 H_1(2) + w_p^1 H_1(3) \right\}_p \right)$$

### A3.4.3) Autres termes sources

La discrétisation de tous les autres termes est effectuée au premier ordre en employant le théorème de la moyenne.

## ANNEXE IV

### Conditions aux limites

#### A4.1) Conditions aux limites pour le liquide

A4.1.1) La frontière est une paroi

A4.1.1.1) Cas de la vitesse

A4.1.1.2) Cas de l'énergie cinétique de la turbulence

A4.1.1.3) Cas du taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence

A4.1.2) A un injecteur

A4.1.3) A la surface libre

A4.1.3.1) Cas de la vitesse

A4.1.3.2) Cas de la pression

A4.1.3.3) Cas de l'énergie cinétique de la turbulence et de son taux de dissipation

#### A4.2) Conditions aux limites pour le gaz

A4.2.1) La frontière est une paroi

A4.2.2) A un injecteur

A4.2.3) A la surface libre

A4.2.3.1) Cas de la vitesse

A4.2.3.2) Cas des autres variables



## ANNEXE IV

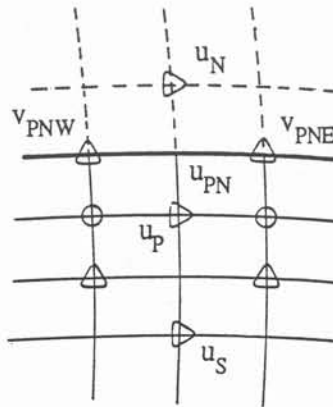
### Conditions aux limites

#### A4.1) Conditions aux limites pour le liquide

##### A4.1.1) La frontière est une paroi

##### A4.1.1.1) Cas de la vitesse

Considérons le cas de la figure suivante : paroi "*nord*".



Nous désirons imposer une condition de non glissement (adhérence) à la paroi, c'est à dire que nous voulons avoir :

$$u_{PN} = v_{PNW} = v_{PNE} = 0$$

Ainsi, nous imposons un débit nul à travers la facette "*nord*" :

$$u_N = -u_P$$

$$v_{PNW} = v_{PNE} = 0$$

$$A_N = 0$$

Mais ce faisant, nous éliminons la contribution du frottement sur la facette "*nord*". C'est pourquoi, un terme supplémentaire est ajouté et englobé dans le pivot car en effet :

$$F_N = \int_{PNW}^{PNE} h^3 \mu_1 \alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial s_2} ds_1 = \tau_{PN} S_{PN}^{13}$$

$$\tau_{PN} = \mu_{PN} \alpha_{PN} \left( \frac{\partial u_1}{\partial s_2} \right)_{PN}$$



Il nous reste à évaluer le frottement pariétal  $\tau_{PN}$ . Ce terme peut être délicat à calculer si de forts gradients de vitesse existent au voisinage de la paroi (cas d'un point dans une couche limite). Nous avons donc choisi de distinguer les deux cas de figure suivants :

- le point P se trouve dans la couche limite laminaire ou la sous-couche visqueuse en régime turbulent : nous pouvons calculer le frottement correctement par l'expression suivante :

$$\tau_{PN} = - \mu_{PN} \frac{u_P}{y_P} \alpha_{PN}$$

où  $y_P$  représente la distance à la paroi "*nord*".

- sinon, nous introduisons la vitesse de frottement  $u_*$  telle que :

$$\tau_{PN} = - \rho_l u_*^2$$

La vitesse de frottement est déduite soit de la loi logarithmique au voisinage de la paroi, soit de l'énergie cinétique de la turbulence au voisinage de la paroi /4.19/ :

$$\frac{u_P}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \log \left( \beta \frac{y_P}{\delta_0} \right)$$

$$u_*^2 = C_\mu^{0.5} k_P$$

avec  $\kappa$  la constante de Karman et  $\beta$  une constante empirique.  
En mêlant ces expressions, nous obtenons finalement :

$$\tau_{PN} = - \alpha_{PN} \rho_{PN} C_\mu^{0.25} k_P^{0.5} u_P / \left( \frac{1}{\kappa} \log \left( \beta \frac{y_P}{\delta_0} \right) \right)$$

Nous mentionnons que le frottement pariétal change d'expression quand la distance à la paroi  $y_P$  normalisée par l'épaisseur de la couche limite  $\delta_0$  est de l'ordre de 11.63. L'épaisseur de la couche limite est évaluée comme :

$$\delta_0 = \frac{\nu}{u_*} = \frac{\mu_P}{\rho_P C_\mu^{0.25} k_P^{0.5}}$$

#### A4.1.1.2) Cas de l'énergie cinétique de la turbulence

La conservation de l'énergie dans le domaine étudié s'écrit ainsi :

$$\int_V (G - \rho \epsilon) dv = 0$$

Cette formule traduit l'égalité entre la puissance des forces extérieures et la puissance dissipée par la turbulence. En effet, l'équation de transport de l'énergie cinétique de la turbulence s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(\alpha \rho k) = \operatorname{div}\left(\alpha_1 \frac{H}{\sigma_k} \operatorname{grad} k\right) + \alpha G - \alpha \rho \varepsilon = \frac{\partial}{\partial t}(\alpha \rho k) + \operatorname{div}(\alpha \rho k u)$$

donc, en excluant les variations temporelles, nous obtenons :

$$\int_V \alpha \rho k \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 = \int_V \operatorname{div}\left(\alpha \frac{H}{\sigma_k} \operatorname{grad} k\right) \, dv$$

Alors, la conservation globale de l'énergie cinétique de la turbulence s'écrit :

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$$

sur toutes les frontières du domaine. Si nous considérons le cas d'une frontière "*nord*", nous écrivons :

$$A_N = 0$$

Mais nous savons que près d'une paroi, les gradients de vitesse et de dissipation turbulente sont importants. C'est pourquoi nous transformons l'expression du terme de production de l'énergie cinétique de la turbulence :

$$G_P - \rho_P \varepsilon_P$$

en calculant différemment ces deux termes.

Premièrement, évaluons plus précisément la valeur du taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence :

$$\varepsilon_P = \frac{1}{y_P} \int_{\delta_0/\beta}^{y_P} \varepsilon \, dy$$

Si nous introduisons la vitesse de frottement  $u_*$  et l'échelle intégrale des tourbillons  $l$  :

$$l = \kappa y \quad \varepsilon = \frac{u_*^3}{l}$$

nous obtenons la relation suivante :

$$\varepsilon_p = \frac{u_*^3}{\kappa y_p} \log(\beta y_p^+) = \frac{C_\mu^{0.75} k_p^{1.5}}{\kappa y_p} \log(\beta y_p^+)$$

Deuxièmement, si nous regardons le terme de production G, nous pouvons dire que pour une paroi "*nord*", le terme suivant est incorrectement évalué, sous estimé en réalité :

$$\left( \frac{\partial u}{\partial s^2} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial s^2} \left( u \frac{\partial u}{\partial s^2} \right) - u \frac{\partial^2 u}{\partial s^2^2}$$

il est plus juste de calculer ce terme de la façon suivante :

$$\mu \left( \frac{\partial u}{\partial s^2} \right)^2 = \mu \frac{\partial}{\partial s^2} \left( u \frac{\partial u}{\partial s^2} \right) = \mu \frac{u_p}{y_p} \left( \frac{\partial u}{\partial s^2} \right)_p = \frac{|u_p \tau_{PN}|}{y_p}$$

#### A4.1.1.3) Cas du taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence

Les modèles de turbulence classiques utilisent la relation (IV.10) pour définir le taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence. Nous imposons directement la valeur  $\varepsilon_p$  à  $\varepsilon$  en écrivant :

$$SU = 10^{20} \varepsilon_p$$

$$SP = 10^{20}$$

#### A4.1.2) A un injecteur

Au niveau d'un injecteur, les conditions imposées sont les mêmes que pour une surface libre, c'est à dire des conditions de Neuman : pas de frottement ni de débit.

#### A4.1.3) A la surface libre

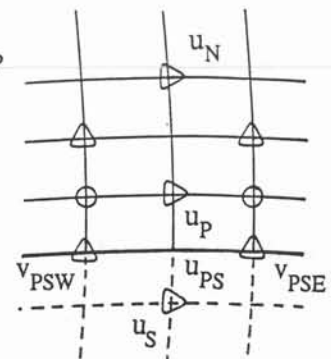
##### A4.1.3.1) Cas de la vitesse

Pour décrire le fait que l'écoulement est parallèle à la surface libre (cas d'une frontière "*sud*"), nous imposons un débit nul et un frottement nul :

$$v_{PSW} = v_{PSE} = 0$$

$$A_S = 0$$

$$u_S = u_p$$



### A4.1.3.2) Cas de la pression

Dans certains cas, nous nous sommes intéressés à la déformation de la surface libre créée par le jet central. Le calcul de la géométrie de la surface libre est itératif. Nous supposons que cette surface est une isobare. Le calcul hydrodynamique fournit alors une vitesse de surface et un gradient de pression qui n'est pas forcément nul. La surface est alors déformée de la manière suivante :

$$z^n = z^{n-1} + \frac{p}{\rho_1 g} - z_0$$

$$z_0 = \int_S \frac{p}{\rho_1 g} ds$$

Ce procédé itératif suppose le calcul d'un maillage curviligne orthogonal à chaque itération jusqu'à convergence à la fois des champs de vitesse, de taux de présence..., mais aussi de la condition de surface libre isobare. Il est à remarquer qu'une sous relaxation peut être introduite dans le calcul pas à pas de la forme de la surface libre de manière à éviter l'apparition de singularités.

### A4.1.3.3) Cas de l'énergie cinétique de la turbulence et de son taux de dissipation

Une simple condition de non flux et de dérivée normale nulle est imposée à ces deux variables dans le cas d'une surface libre :

$$A_S = 0 \quad k_S = k_P \quad \epsilon_S = \epsilon_P$$

## A4.2) Conditions aux limites pour le gaz

### A4.2.1) La frontière est une paroi

Nous imposons une condition de non glissement (adhérence) à une paroi et un frottement pariétal laminaire (voir cas du liquide). Rappelons ici que les termes de diffusion sont secondaires vis à vis des autres termes et qu'une formulation, même "simpliste" suffit dans notre cas de figure.

### A4.2.2) A un injecteur

Le gaz est injecté avec un débit connu imposé et une vitesse déterminée (débit masse bloqué au col de la tuyère d'injection). Nous imposons de surcroît un taux de présence de la phase gaz égal à 1 à l'injecteur, ce qui est traduit par :

$$A_W = 0 \quad SU = - \text{debit de gaz} \quad \alpha_{gW} = 1$$

### A4.2.3) A la surface libre

#### A4.2.3.1) Cas de la vitesse

Nous faisons l'hypothèse que le gaz traverse librement la surface libre (interface

liquide-air), c'est à dire comme expliqué ci-dessous sans gradient de vitesse suivant la normale à la surface, faute de mieux. Autrement dit, le gradient suivant la normale à la surface libre de la vitesse du gaz est nul :

$$\frac{\partial u_i^g}{\partial x_3} = 0 \quad i = 1, 2 \text{ ou } 3$$

Cette hypothèse est en réalité la plus simple que l'on puisse imposer. Elle ne pose pas de problème de conservation de masse pour le gaz, sauf peut être encore pour de faible maillage (environ 8x8). Il serait plus exact de construire une équation de conservation de quantité de mouvement pour la composante verticale de la vitesse sur une demi-maille à la surface libre. Mais dans ce cas de nouveaux problèmes apparaissent comme la valeur du gradient de pression dans cette maille. Cette idée a été envisagée en utilisant une répartition hydrostatique de la pression, mais sans succès.

Certains auteurs Ramshaw et Koh /4.20-4.21/ ont proposé et utilisé la technique appelée "donor-acceptor" pour traiter la surface libre. Cette méthode semble néanmoins limitée au cas de faibles débits de gaz.

#### A4.2.3.2) Cas des autres variables

Une simple condition de non flux et de dérivée normale nulle est imposée :

$$A_s = 0$$

## ANNEXE V

### Système de mesure : polarographie ou voltampérométrie

A5.1) Principe

A5.2) Sondes polarographiques

A5.3) Etalonnage des sondes simples

A5.3.1) polarogramme

A5.3.2) étalonnage

A5.4) Remarques

A5.5) Traitement du signal



## ANNEXE V

### Système de mesure : polarographie ou voltampérométrie

#### A5.1) Principe

La voltampérométrie est une méthode électrochimique permettant essentiellement d'avoir accès à la mesure du gradient pariétal de vitesse d'un écoulement de liquide. Elle peut néanmoins s'appliquer à coeur avec succès.

Le principe de cette méthode a été exprimé de nombreuses fois il y a déjà longtemps /A5.1-A5.2-A5.3/. Cette méthode utilise la réduction électrochimique rapide d'un réactif en solution, en général ionique, dans un liquide en mouvement à la surface d'une électrode. L'électrode de mesure (cathode), de petites dimensions, est portée à un potentiel par rapport à une contre électrode de dimensions relativement grandes, qui déclenche à sa surface la réaction de réduction.

Le courant recueilli sur l'électrode de mesure résulte du déplacement des ions actifs par :

- transport convectif dû au mouvement du milieu,
- diffusion sous l'action du gradient de concentration,
- migration sous l'effet du champ électrique existant entre anode et cathode.

La migration due au champ électrique est fortement neutralisée par l'addition massive d'un électrolyte indifférent. Ainsi l'apport de réactif à la surface de l'électrode de mesure se fait par convection et diffusion essentiellement. Le flux de matière  $\Phi$  est alors donné par l'expression :

$$\Phi = - \iint D \left( \frac{\partial C}{\partial n} \right)_0 ds$$

D : coefficient de diffusion  
C : concentration du réactif

Le courant  $i$  créé par ce flux est :

$$i = n F \Phi$$

$n$  : nombre d'électrons  
 $F$  : nombre de Faraday

Le coefficient de transfert global s'écrit alors :

$$K = \frac{\Phi}{A C_0} = \frac{i}{A C_0 n F}$$

ou encore sous forme adimensionnelle :



$$Sh = \frac{\Phi d}{AC_0 D}$$

A : aire de la partie active de l'électrode,  
d : dimension caractéristique de l'électrode.

Le nombre de Sherwood est en transfert de masse l'analogie du nombre de Nusselt en transfert de chaleur.

La solution utilisée ici est composée de Ferri-Ferrocyanure de Potassium avec pour électrolyte indifférent du chlorure de potassium. Les concentrations retenues sont les suivantes :

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| - Ferricyanure de Potassium | $[K_3Fe(CN)_6] = 2 \cdot 10^{-4} \text{ mol/l}$ |
| - Ferrocyanure de Potassium | $[K_4Fe(CN)_6] = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mol/l}$ |
| - Chlorure de Potassium     | $[KCl] = 1 \cdot 10^{-2} \text{ mol/l}$         |

La réaction de réduction électrochimique qui se produit à l'électrode de mesure est



La réaction inverse, d'oxydation du Ferrocyanure est réalisée à la surface de la contre électrode.

## A5.2) Sondes polarographiques

Nous avons utilisé trois types de sondes (figure A5.1) :

- des sondes simples constituées par un fil de platine de diamètre de 0.05mm, de longueur 10mm environ, tendu entre deux broches conductrices, elles mêmes soudées à une tige conductrice entourée d'une gaine isolante. Un vernis isolant recouvre les deux broches, la partie non gainée de la tige et le fil de platine à l'exception de sa partie centrale. Celle-ci, d'une longueur de 1.5mm est le seul élément métallique en contact avec la solution.

Ces sondes permettent d'accéder au module de la vitesse moyennant un étalonnage.

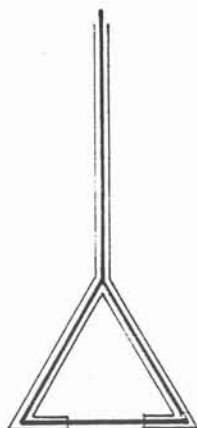
- des sondes doubles, qui donnent une mesure d'une composante de la vitesse par intercorrélation des deux signaux délivrés par les sondes.

- des sondes à contact particulièrement adaptées à la mesure du taux de présence de la phase gazeuse.

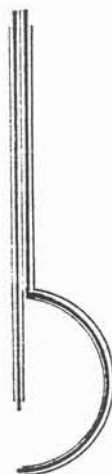
Par analogie avec la technique du fil chaud, nous écrivons donc que le nombre de Sherwood est fonction linéaire de la racine carrée du nombre de Reynolds de l'écoulement environnant :

$$Sh = A + B \sqrt{Re}$$

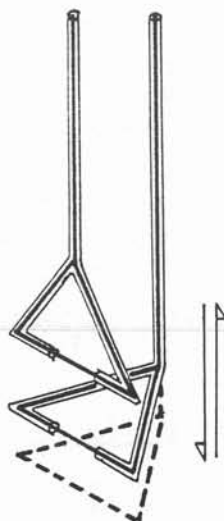
ce qui conduit directement à la formule 5.2.



sonde simple à fil



sonde double à contact



sonde double à fil

### A5.3) Etalonnage des sondes simples

Il s'agit de déterminer les coefficients a et b de la loi 5.2.

#### A5.3.1) polarogramme

Nous appliquons une tension de polarisation V entre les électrodes et nous relevons le courant électrique qui passe dans le fil de platine. Les polarogrammes (courbes  $i = f(v)$ ) ont l'allure représentée figure A5.2. Nous distinguons trois zones sur un polarogramme :

zone 1: elle correspond à une réaction électrochimique incomplète,

zone 2: le courant est quasiment constant. Ce palier correspond aux conditions de diffusion. Il se situe entre 200 et 750 mV. Nous avons donc choisi lors des mesures une tension de polarisation moyenne de 500 mV,

zone 3: c'est l'électrolyse de la solution.

#### A5.3.2) étalonnage

Ce courant limite est en réalité fonction de la vitesse du fluide environnant suivant une loi du type 5.2. Les coefficients a et b dépendent de la surface de la sonde, de la concentration en ferri-cyanure et de la température. Ces coefficients sont déterminés expérimentalement à l'aide de la technique déjà mise en oeuvre /A5.4/. Nous faisons tourner la sonde autour d'un axe à une vitesse de rotation connue. Nous déterminons la vitesse relative de la sonde par rapport au liquide et l'intensité du courant qu'elle délivre. L'étalonnage est ainsi possible.

Il faut bien noter qu'une correction est nécessaire car la sonde met le liquide en mouvement. Nous pouvons accéder à cette vitesse supplémentaire en arrêtant brusquement la sonde. Le courant  $i_L$  mesuré correspond à cette vitesse.

Nous faisons alors l'hypothèse que la vitesse du liquide est proportionnelle à celle de la sonde

$$u_L = k u$$

ce qui nous conduit au système d'équations suivant :

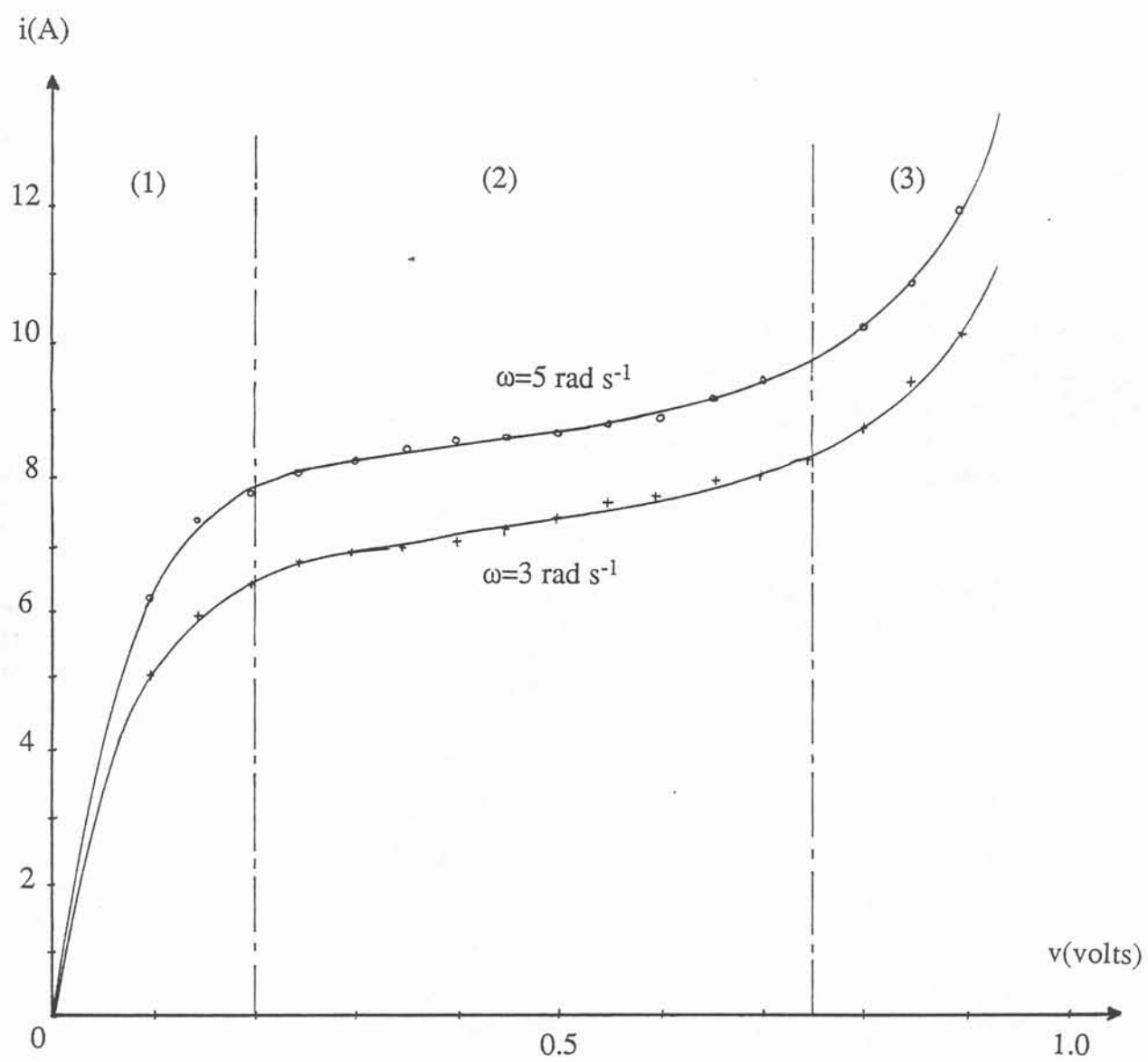
$$\begin{aligned} i &= a \sqrt{|u - u_L|} + b \\ i_L &= a \sqrt{|u_L|} + b \\ u_L &= k u \end{aligned}$$

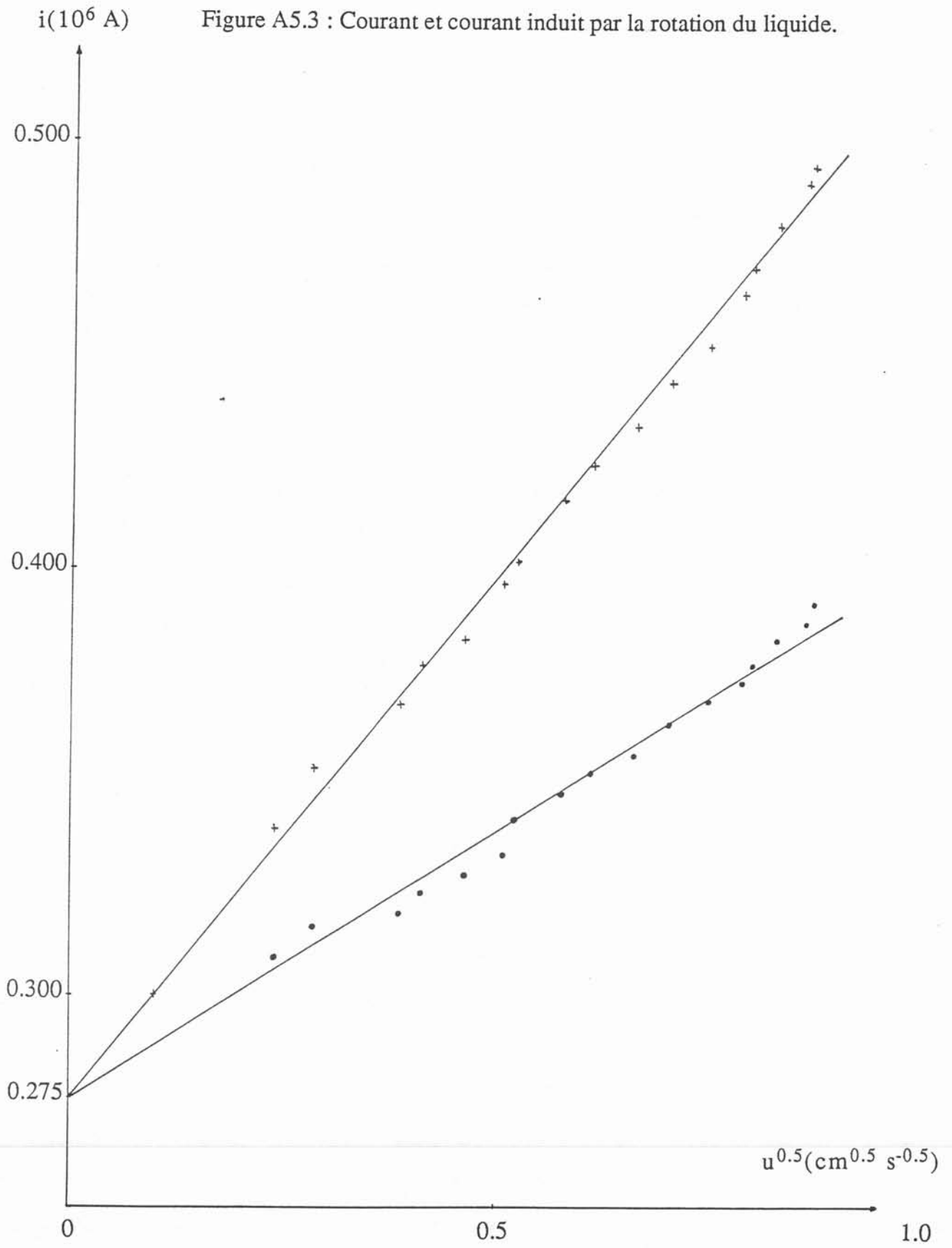
soit encore :

$$\begin{aligned} i &= a \sqrt{1-k} \sqrt{|u|} + b \\ i_L &= a \sqrt{k} \sqrt{|u|} + b \end{aligned}$$

Ainsi b est l'ordonnée à l'origine des droites (figure A5.3) :

Figure A5.2 : Polarogramme.





$$i = i(\sqrt{|u|}) \quad \text{et} \quad i_L = i_L(\sqrt{|u|})$$

Le coefficient  $a$  est tiré de l'équation (figure A5.4) :

$$a^2 |u| = (i - b)^2 + (i_L - b)^2$$

#### A5.4) Remarques

**Vitesse efficace** : une sonde à fil est essentiellement sensible à la composante de vitesse perpendiculaire au fil. Cependant, elle l'est aussi, mais à un degré moindre à la composante parallèle au fil. Cet effet est traduit en introduisant une vitesse efficace :

$$U_{\text{eff}} = U (\cos^2 \psi + A \sin^2 \psi)^{1/2}$$

avec

- A    constante déterminée par étalonnage,
- U    module de la vitesse,
- $\psi$    angle relatif entre la vitesse incidente et un plan perpendiculaire au fil.

L'examen de la littérature montre une dispersion importante des valeurs de  $A$  proposées /A5.5,A5.6/ :

$$0 < A < 0.4$$

**Réponse en fréquence** : Les sondes polarographiques offrent une mauvaise réponse en fréquence /A5.7/. Les sondes cylindriques ont un comportement satisfaisant jusqu'à 100Hz. A 170Hz, elles donnent lieu à une atténuation de 10%.

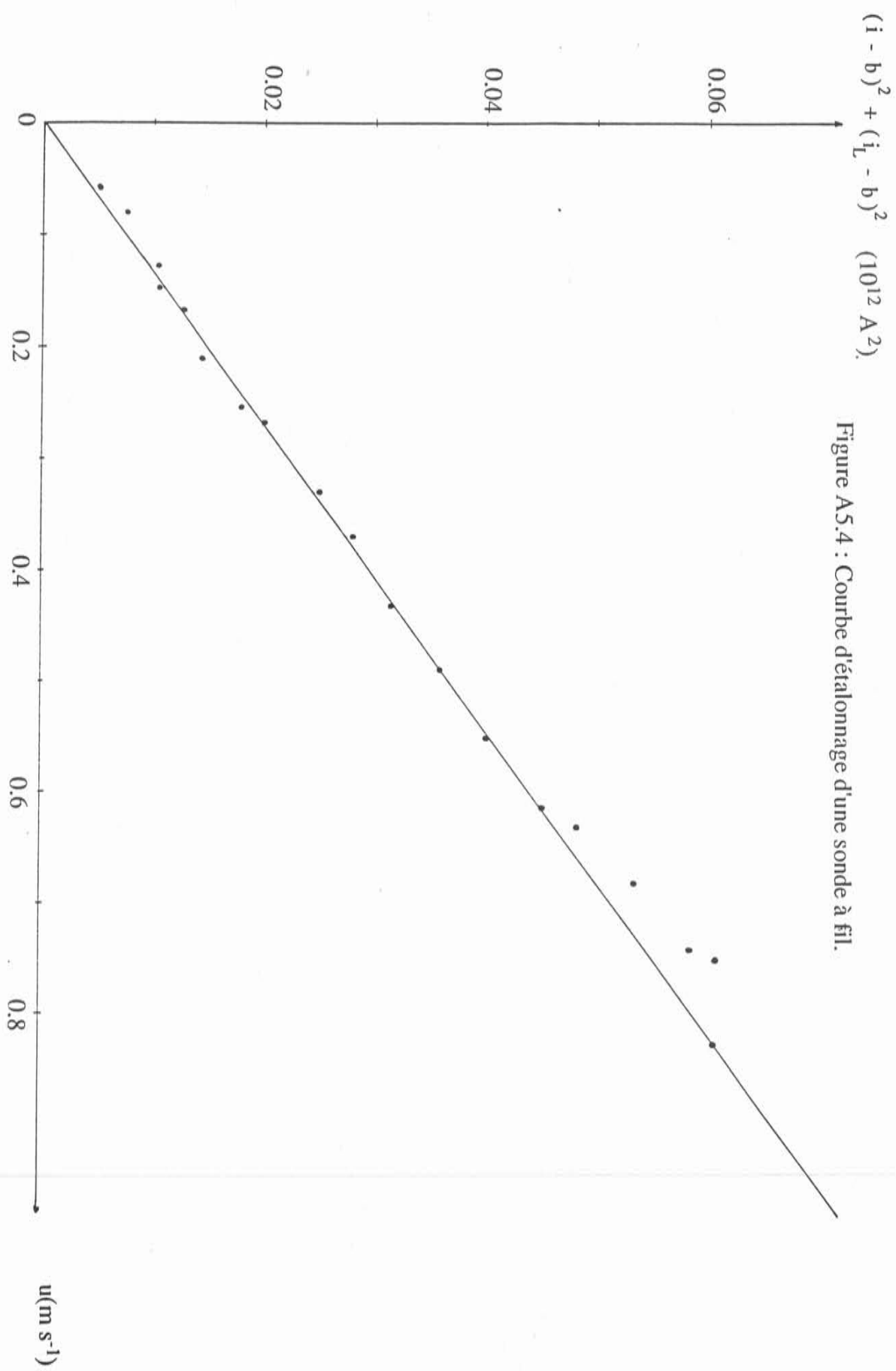
**Relation  $i=f(u)$**  : la courbe qui représente au mieux les résultats expérimentaux n'est pas régulière, et met en évidence des changements de régime de convection :

- l'écoulement autour d'un cylindre se fait sans sillage jusqu'à  $Re=5$ ,
- pour  $Re>5$ , un sillage apparaît au coeur, rendant le transfert moins important sur la face aval du cylindre, d'où une diminution du  $Sh$ ,
- au delà, il se forme deux allées tourbillonnaires du type Bénard-Karman avec une recirculation, ce qui augmente le  $Sh$  ( $Re$  de 40 à 100).

#### A5.5) Traitement du signal

Le système d'acquisition et de traitement du signal utilisé comporte les éléments suivants :

- un convertisseur courant-tension,
- une horloge,
- un convertisseur digital-numérique,
- un micro-ordinateur,
- une sortie graphique.



Sa référence chez DIGITAL est DECLAB-11/MNC. Le micro-ordinateur est un MINC 23.

Le courant mesuré sur l'électrode, qui provient de la réaction électrochimique se produisant à sa surface, de l'ordre du micro-ampère, est converti sous très grande impédance en tension. Ce courant est centré et amplifié pour occuper l'intervalle  $\pm 4.5$  V. Le convertisseur A/N discrétise et numérise cette tension sur 4096 niveaux. Ces valeurs sont stockées ensuite dans la MEV de l'ordinateur et traitées. Nous disposons également d'un filtre en sortie de convertisseur, permettant l'élimination de certaines fréquences parasites. Un oscilloscope permet enfin la visualisation du signal recueilli.





# **Contribution à l'étude du brassage pneumatique de métaux liquides en poche de traitement et des transferts métal-laitier.**

## **Aspects expérimentaux et fondamentaux.**

### RESUME :

Le brassage pneumatique est un moyen couramment utilisé en métallurgie en poche pour mettre en mouvement un métal liquide et augmenter la cinétique des réactions métal-laitier. L'objectif de cette étude est de relier les transferts de masse entre métal et laitier aux caractéristiques géométriques de l'installation, physiques des fluides et hydrodynamiques de l'écoulement induit par bullage. C'est pourquoi nous avons développé un modèle de calcul d'écoulements turbulents à deux phases à fermeture en un point. Les premiers résultats montrent un bon accord entre les champs de vitesse et de taux de présence mesurés dans une cuve cylindrique avec un injecteur centré ou excentré et les champs prédits par le calcul numérique. Une étude portant sur les transferts de masse est également présentée.

### ABSTRACT :

In the steel metallurgy, gas injections are often used to stir liquid metal and accelerate the rate of chemical reactions with slag. The final aim of the study is to relate mass transfer between slag and metal to liquid phases flow patterns. Therefore, a two-equation turbulence model based on a two-velocity field has been developed. First testing show good agreements between numerical predicted and experimental measured features of gas-stirring in a scale water model in centered and offcentered configurations. Mass transfer studies have also been developed with the help of an hydrodynamic coupling model.

### MOTS CLES :

Métallurgie - Brassage pneumatique - Laitier - Ecoulements diphasiques -

Modélisation - Mesures - Simulation - Ecoulements tridimensionnels - Transferts -

Bulles - Turbulence - Interface - Couche limite

